

## 1. Caminos y circuitos eulerianos.

Este tema se remonta al problema de los siete puentes de Königsberg, resuelto por Leonhard Euler en 1736 y cuya resolución dio origen a la teoría de grafos.

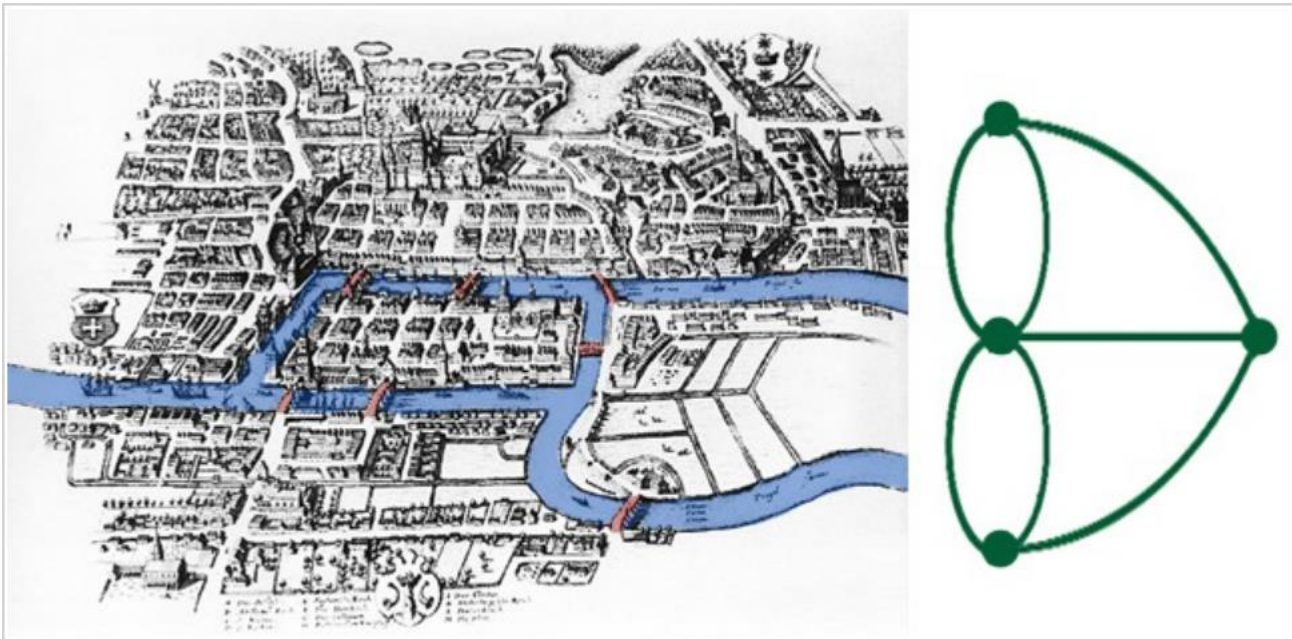


Figura 1. Puentes de Königsberg y su representación con un grafo.

Dado el mapa de Königsberg, con el río Pregel dividiendo el plano en cuatro regiones distintas, que están unidas a través de los siete puentes, ¿es posible dar un paseo comenzando desde cualquiera de estas regiones, pasando por todos los puentes, recorriendo sólo una vez cada uno, y regresando al mismo punto de partida?

La pregunta se convierte entonces en si hay o no algún circuito simple que contenga todas las aristas del grafo.

La respuesta es negativa, es decir, NO existe una ruta con estas características.

Un circuito euleriano de un grafo  $G$  es un circuito simple que contiene a todas las aristas de  $G$ .

Un camino euleriano es un camino simple que contiene a todas las aristas de  $G$ .

El estudio de los caminos eulerianos puede ser aplicado en varias áreas:

- buscar caminos que cruzan todas las calles de una ciudad;
- cada camino en una red de transportes;
- cada link en una red de computadores.

Y cada uno de estos solo una vez.

Sorpresivamente, existe un criterio simple para determinar si un grafo conexo contiene un circuito euleriano (Euler, 1736):

Teorema

Sea  $G$  un grafo conexo con al menos dos vértices.

Entonces  $G$  tiene un circuito euleriano si y solo si todos sus vértices tienen grado par.

Teorema

Sea  $G$  un multigrafo conexo con al menos dos vértices.

Entonces  $G$  tiene un camino pero no un circuito euleriano si y solo si tiene exactamente dos vértices de grado impar.

¿Cuáles de los grafos no dirigidos de la Figura 2 contienen un circuito (ciclo) euleriano?

Entre aquellos que no lo contienen, ¿cuáles contienen un camino euleriano?

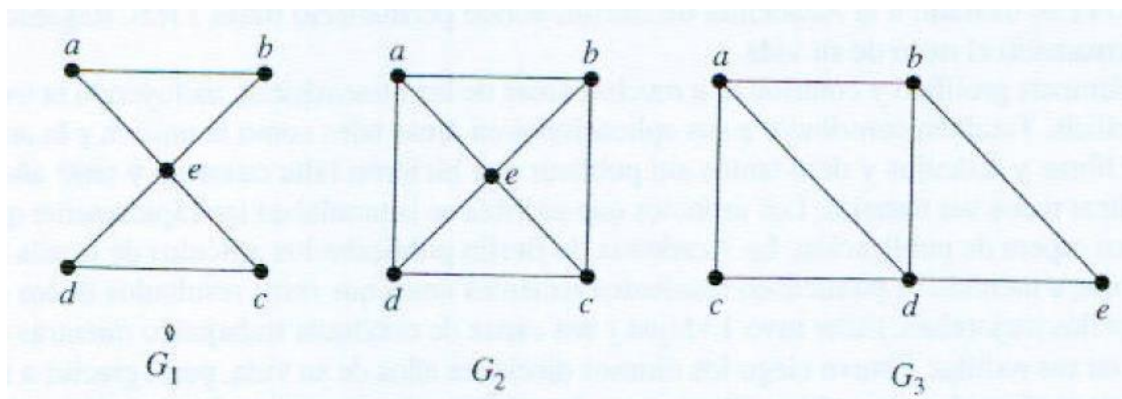


Figura 2. Grafos no dirigidos para evaluar si contienen circuitos eulerianos.

El grafo  $G_1$  contiene un circuito euleriano  $(a,e,c,d,e,b,a)$ .

Ni  $G_2$  ni  $G_3$  contienen un circuito euleriano.

No obstante,  $G_3$  contiene un camino euleriano  $(a,c,d,e,b,d,a,b)$ .

El grafo  $G_2$  no contiene camino euleriano alguno.

## 2. Caminos y circuitos hamiltonianos.

Un camino hamiltoniano es una sucesión de aristas adyacentes, que visita todos los vértices del grafo una sola vez.

Si además el último vértice visitado es adyacente al primero, el camino es un ciclo hamiltoniano, como se aprecia en la figura 3.

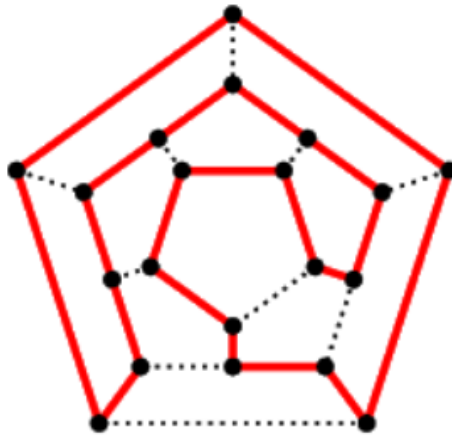
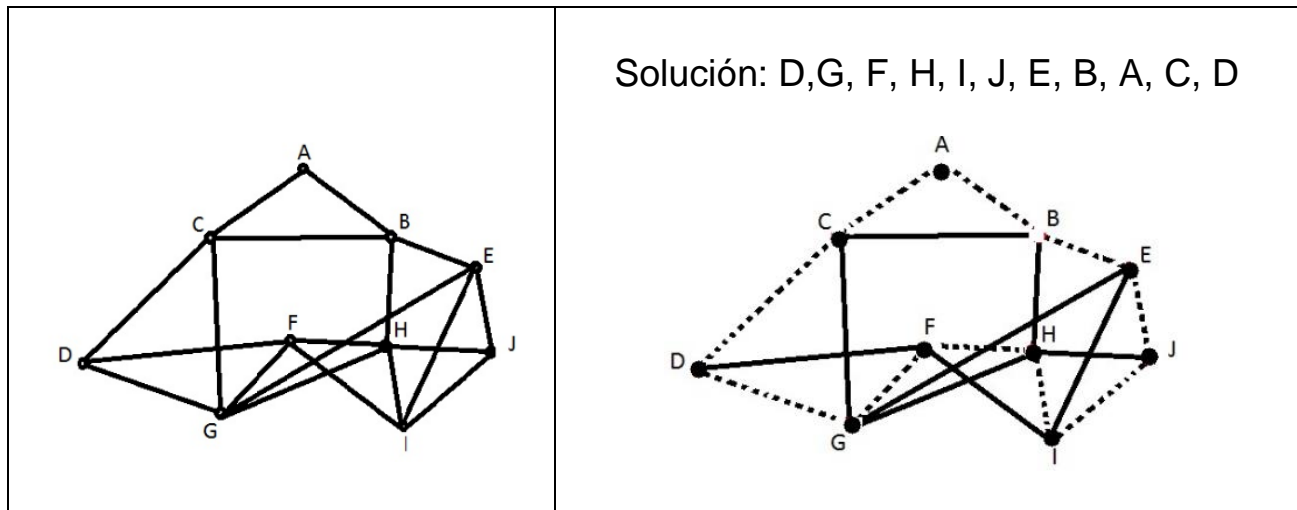


Figura 3. Grafos que contiene un ciclo hamiltoniano.

Determinar si es posible un circuito de Hamilton en el siguiente grafo.



----- **FIN DEL DOCUMENTO**