COLOREADO DE GRAFOS

Todo mapa en el plano se puede representar por medio de un grafo. Para establecer esta correspondencia, cada región del mapa se representa mediante un vértice. Una arista conecta dos vértices si las regiones representadas por dichos vértices tienen frontera en común. Dos regiones que se tocan en un solo punto no se consideran adyacentes.

Al grafo resultante se le llama grafo dual del mapa. La Figura 2 muestra los grafos duales que corresponden a los mapas de la Figura 1.

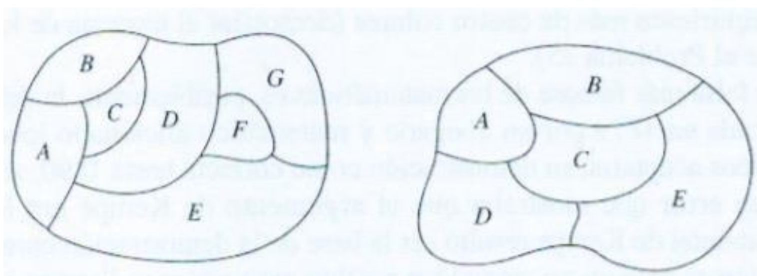


Figura 1. Dos mapas

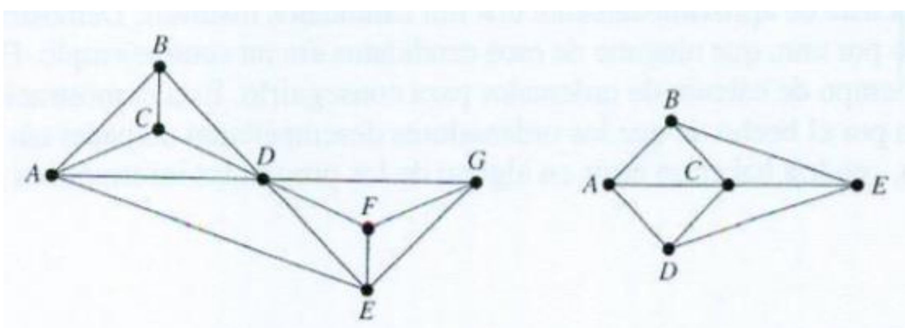


Figura 2. Los grafos duales de los mapas de la Figura 1.

El problema de colorear las regiones de un mapa es equivalente al de colorear los vértices del grafo dual de tal manera que ningún par de vértices adyacentes del grafo tenga el mismo color.

Una coloración de un grafo consiste en asignarle
un color a cada vértice del grafo
de manera que a cada dos vértices adyacentes
se les asignan colores distintos

Un grafo puede colorearse asignándoles un color distinto a cada vértice. Sin embargo, para la mayor parte de los grafos, se puede encontrar una coloración que utiliza menos colores que el número de vértices del grafo.

El número cromático de un grafo
es el número mínimo de colores que se requieren
para una coloración del grafo

El Teorema de los cuatro colores: El número cromático de un **grafo plano*** es menor o igual que cuatro.

(*) Un grafo plano (o planar) es un grafo que puede ser dibujado en el plano sin que ninguna arista se cruce (una definición más formal puede ser que este grafo pueda ser "incrustado" en un plano).

Ejemplo:
¿Cuáles son los números cromáticos de los grafos G y H de la Figura 3?

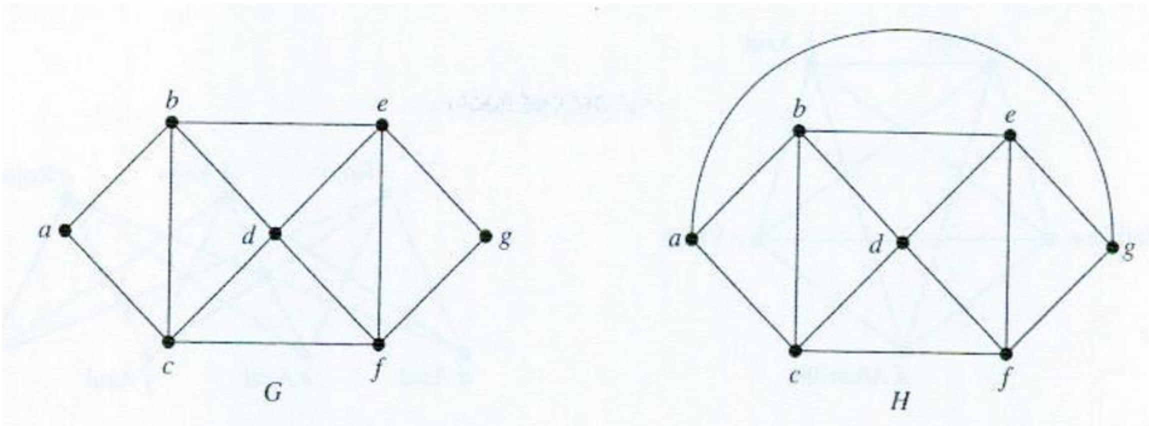


Figura 3. Los grafos G y H.

Solución:

El número cromático de G es al menos 3, ya que los vértices a, b y c se les debe asignar colores distintos. Se asigna: a (rojo), b (azul), c (verde).

Entonces, d se puede (y se tiene que) colorear en rojo, porque es adyacente a los vértices (b , c).

Además, e se puede (y se tiene que) colorear en verde, porque es adyacente a vértices coloreados en rojo y azul.

El vértice f se puede (y se tiene que) colorear en azul, porque es adyacente a vértices coloreados en rojo y verde.

Finalmente, el vértice g se puede (y se tiene que) colorear en rojo, porque es adyacente a vértices coloreados en azul y verde.

Esto produce una coloración de G usando únicamente 3 colores tal como se indica en la Figura 4.

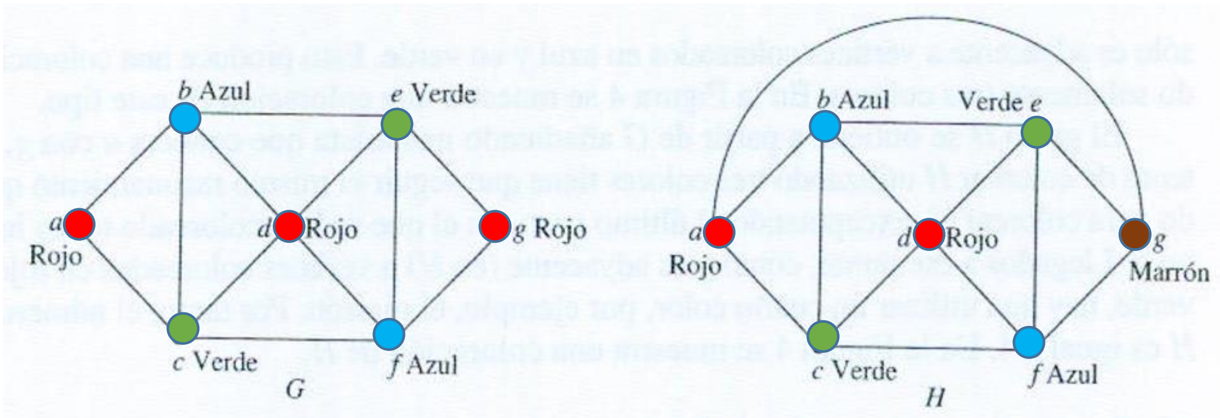


Figura 4. Coloraciones de los grafos G y H.

El grafo H se obtiene a partir de G añadiendo una arista que conecta el vértice a con el vértice g.

Cualquier intento de colorear H utilizando tres colores debe seguir el mismo razonamiento que se usó con el grafo G, excepto el último paso, en el que se han coloreado todos los vértices salvo g. En ese punto, como g es adyacente a vértices coloreados en rojo, azul y verde, debe utilizarse un cuarto color, por ejemplo, el marrón. Por lo tanto, el número cromático del grafo H es igual a 4.

Ejemplo: ¿Cuál es el número cromático de Kn?

Kn es la notación para referirse a un grafo completo, el cual tiene cada par de vértices conectado por una arista.

Solución: puede construirse una coloración de Kn con n colores asignando un color distinto a cada vértice.

¿Hay alguna coloración con menos colores? La respuesta es no.

No puede asignarse el mismo color a dos vértices distintos, ya que dos vértices cualesquiera de este grafo son siempre adyacentes. Por tanto, el número cromático de Kn es n (recuerden que Kn NO es plano para n>=5, por ello, este resultado no contradice al teorema de los cuatro colores).

Figura 5. Una coloración de **K**5.

Ejemplo: ¿Cuál es el número cromático del grafo bipartito completo **K**m,n donde m y n son enteros positivos?

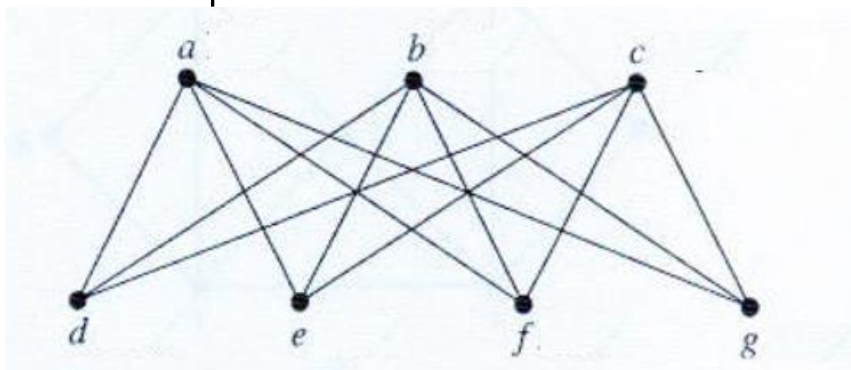


Figura 6. Ejemplo de grafo bipartito

Un grafo bipartito es un grafo G=(N , E) cuyos vértices se pueden separar en dos conjuntos disjuntos U y V, es decir, tal que se cumple

$$U \cup V = N \qquad\qquad U \cap V = \varnothing$$

de manera que las aristas sólo pueden conectar vértices de un conjunto con vértices del otro;

Si los dos subconjuntos tiene la misma cantidad de elementos o cardinalidad, decimos que el grafo bipartito G es balanceado.

Los grafos bipartitos suelen representarse gráficamente con dos columnas (o filas) de vértices y las aristas uniendo vértices de columnas (o filas) diferentes.

Los grafos bipartitos son utilizados para modelar relaciones entre dos diferentes clases de objetos (afiliaciones)

Solución:

Podría pensarse que el número de colores depende de m y n. Sin embargo, sólo se necesitan dos colores.

Se colorea el conjunto de m vértices de un color y el conjunto de n vértices de un segundo color.

Como las aristas conectan siempre un vértice del conjunto de m vértices con un vértice del conjunto de n vértices, ningún par de vértices adyacentes se colorea del mismo color.

En la figura 7 se muestra una coloración de **K**$_{3,4}$ con dos colores.

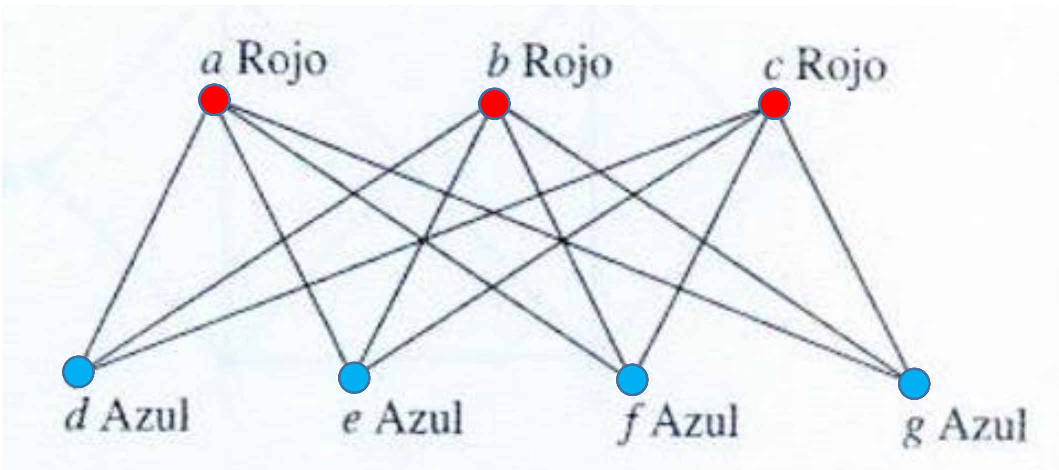


Figura 7. Una coloración de **K**$_{3,4}$.

Ejemplo: ¿Cuál es el número cromático del grafo Cn?

Cn es la notación para referirse al ciclo de n vértices.

En la figura 8 se muestra la coloración de los ciclos C6 y C7.

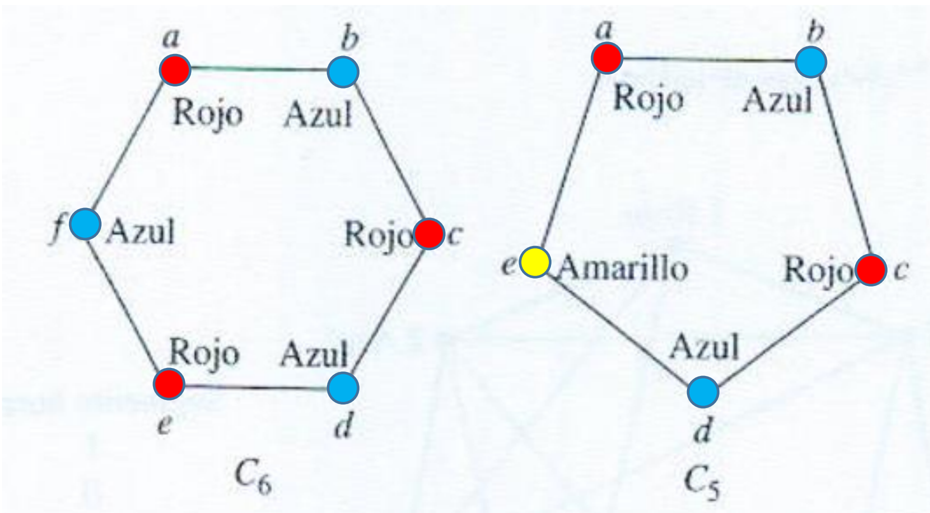


Figura 8. Coloraciones de C5 y C6

En resumen, se necesitan dos colores para colorear Cn cuando n es par.

Cuando n es impar, el número cromático de Cn es 3.

Ejemplo de aplicación del coloreo de grafos. Tenemos las siguientes asignaturas y sus estudiantes:

Asignatura	Estudiantes				
1	E1	E2	E3	E4	-
2	E4	E5	E6	E7	-
3	E3	E5	E8	E12	-
4	E2	E6	E8	E9	-
5	E6	E7	E10	E11	-
6	E8	E9	E10	E13	E14
7	E1	E4	E11	E12	E14

Necesitamos programar los exámenes de las 7 asignaturas.

Dado que hay cursos con al menos 1 estudiante en común,

¿Cómo se pueden programar los exámenes finales de una universidad de modo que ningún estudiante tenga dos exámenes al mismo tiempo?

Este problema de planificación se puede resolver utilizando un modelo con grafos en el que los vértices representan las asignaturas y se traza una arista entre dos vértices si hay un estudiante matriculado en las asignaturas representadas por dichos vértices.

Cada segmento horario reservado para un examen final se representa mediante un color diferente. Una programación de los exámenes corresponde a una coloración del grafo asociado.

Las asignaturas se enumeran del 1 al 7, y que las siguientes parejas de asignaturas tienen alumnos en común:

Asig	Estudiantes				
1	E1	E2	E3	E4	-
2	E4	E5	E6	E7	-
3	E3	E5	E8	E12	-
4	E2	E6	E8	E9	-
5	E6	E7	E10	E11	-
6	E8	E9	E10	E13	E14
7	E1	E4	E11	E12	E14

1-2	E4	1-3	E3	1-4	E2	1-7	E1
2-3	E5	2-4	E6 E7	2-5	E6	2-7	E4
3-4	E8	3-6	E8	3-7	E12		
4-5	E6	4-6	E8 E9				
5-6	E10	5-7	E11				
6-7	E14						

En la figura 9 se muestra el grafo asociado a este conjunto de asignaturas.

1-2, 1-3, 1-4, 1-7, 2-3, 2-4, 2-5, 2-7, 3-4, 3-6, 3-7,

4-5, 4-6, 5-6, 5-7, 6-7.

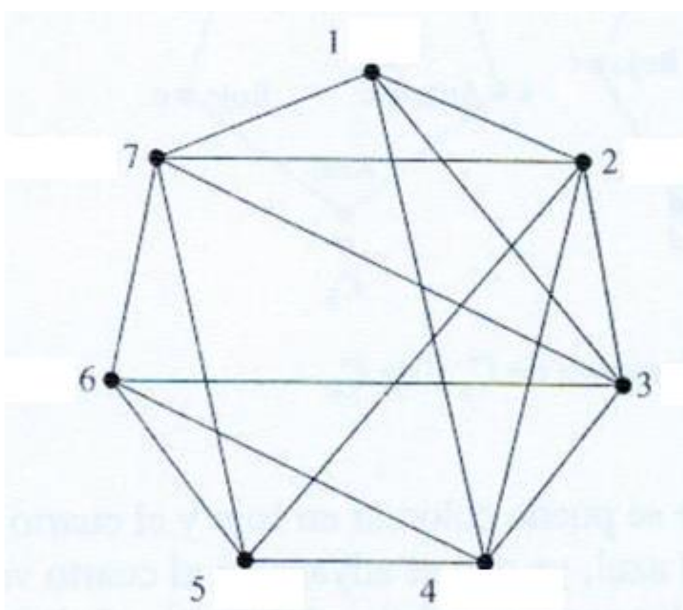


Figura 9. Grafo de planificación de exámenes

Ahora bien, **usaremos un Algoritmo Greedy (Voraz):**

Establecemos un Orden de vértices.

Establecemos un Orden de Colores.

Siguiendo el orden se colorea cada vértice, usando el primer color disponible en la lista de colores, asegurándonos que no haya 2 vértices adyacentes con el mismo color.

Se continúa de esta forma hasta que cada vértice tenga un color.

Para nuestro ejemplo:

Establecemos un Orden de vértices: {1 , 2 , 3 , 4 , 5 , 6 , 7}.

Establecemos un Orden de Colores: {Rojo, Azul, Verde, Marrón, Amarillo}

Asignamos al vértice 1 el primer color disponible:

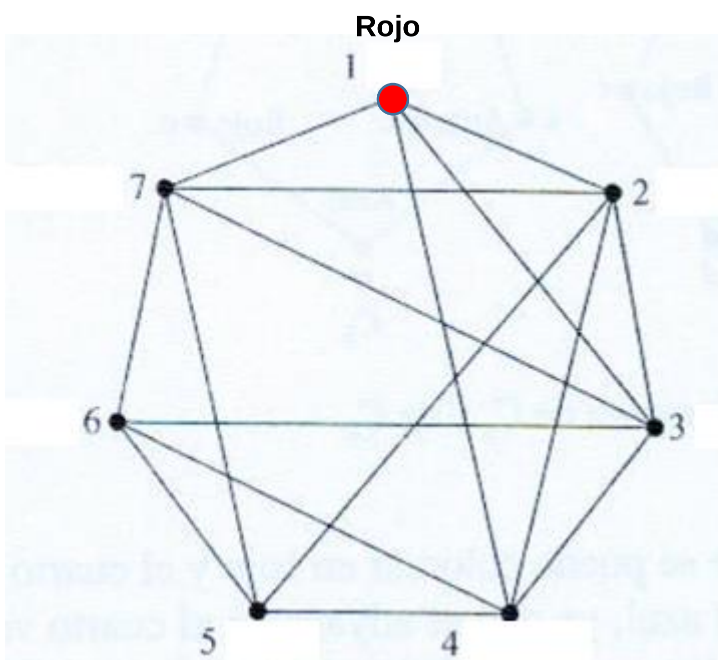


Figura 9-A. Algoritmo Greedy Problema Planificación. Vértice 1.

Sigue el vértice 2. Como es adyacente con el vértice 1 (Rojo), usamos el primer color disponible del orden:
{~~Rojo~~, Azul, Verde, Marrón, Amarillo} y le asignamos el Azul.

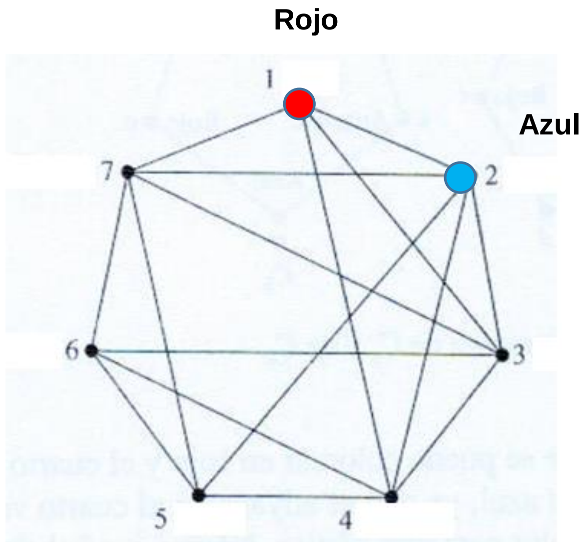


Figura 9-B. Algoritmo Greedy Problema Planificación. Vértice 2.

Sigue el vértice 3. Como es adyacente con el vértice 1 (Rojo), y con el vértice 2 (Azul), usamos el primer color disponible del orden: {~~Rojo~~, ~~Azul~~, Verde, Marrón, Amarillo} y le asignamos el Verde.

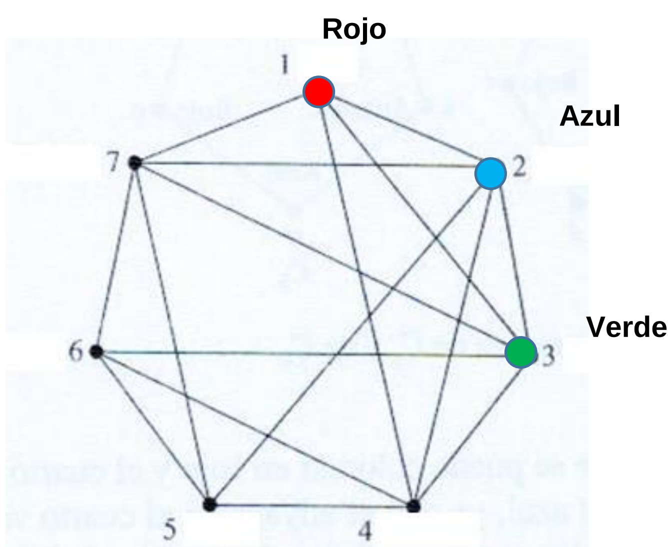


Figura 9-C. Algoritmo Greedy Problema Planificación. Vértice 3.

Sigue el vértice 4. Como es adyacente con el vértice 1 (Rojo), con el vértice 2 (Azul) y con el vértice 3 (Verde), (y con los vértices 5 y 6 pero estos no tienen color) usamos el primer color disponible del orden: {~~Rojo~~, ~~Azul~~, ~~Verde~~, Marrón, Amarillo} y le asignamos el Marrón.

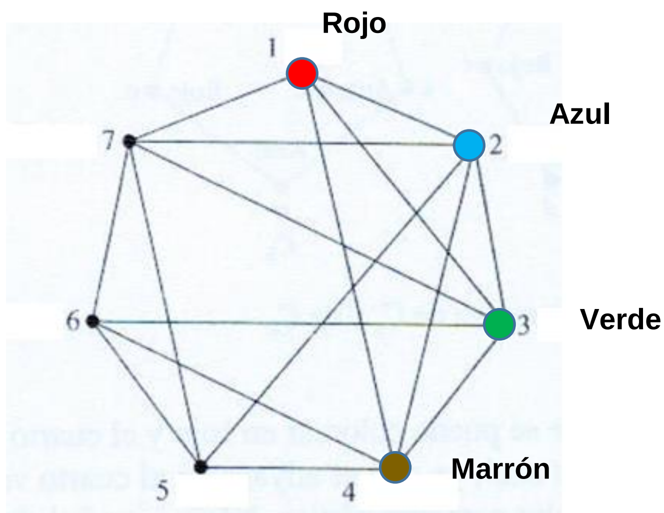


Figura 9-D. Algoritmo Greedy Problema Planificación. Vértice 4.

Sigue el vértice 5. Como es adyacente con el vértice 2 (Azul) y con el vértice 4 (Marrón), (y con los vértices 6 y 7 pero estos no tienen color) usamos el primer color disponible del orden: {Rojo, ~~Azul~~, Verde, ~~Marrón~~, Amarillo} y le asignamos el Rojo.

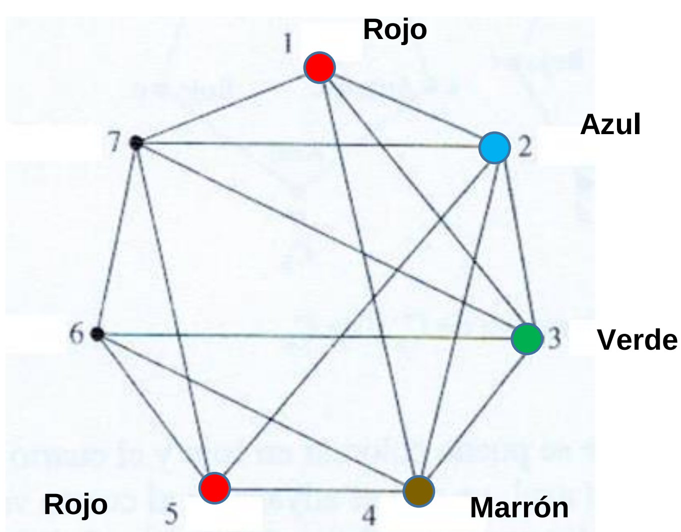


Figura 9-E. Algoritmo Greedy Problema Planificación. Vértice 5.

Sigue el vértice 6. Como es adyacente con el vértice 3 (Verde), con el vértice 4 (Marrón) y con el vértice 5 (Rojo) , (y con el vértice 7 pero no tiene color) usamos el primer color disponible del orden: {~~Rojo~~, Azul, ~~Verde, Marrón~~, Amarillo} y le asignamos el Azul.

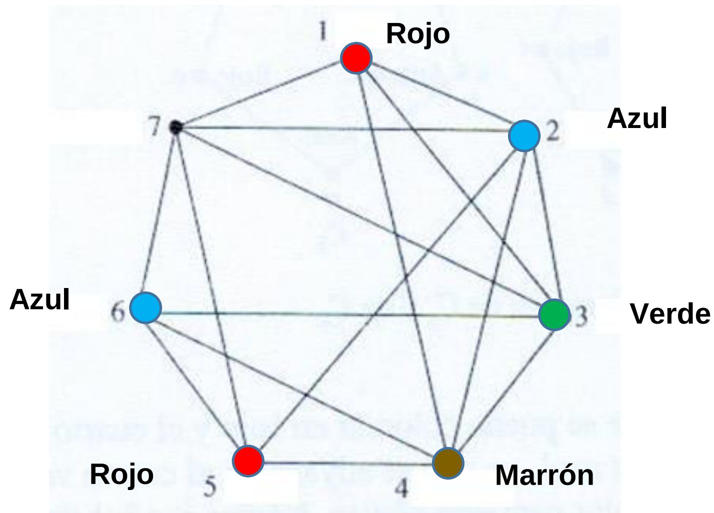
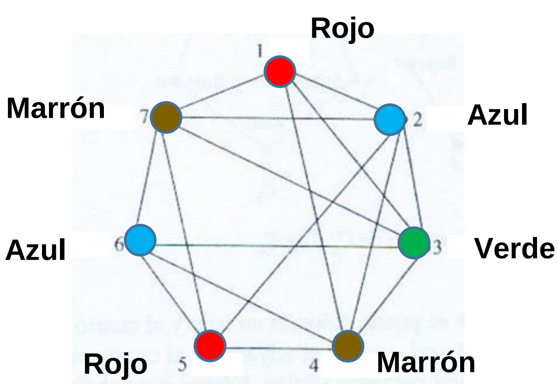


Figura 9-F. Algoritmo Greedy Problema Planificación. Vértice 6.

Sigue el vértice 7.
Como es adyacente con el vértice 1 (Rojo), el vértice 2 (Azul), el vértice 3 (Verde), con el vértice 5 (Rojo) y con el vértice 6 (Azul), usamos el primer color disponible del orden: {~~Rojo, Azul, Verde~~, Marrón, Amarillo} y le asignamos el Marrón.

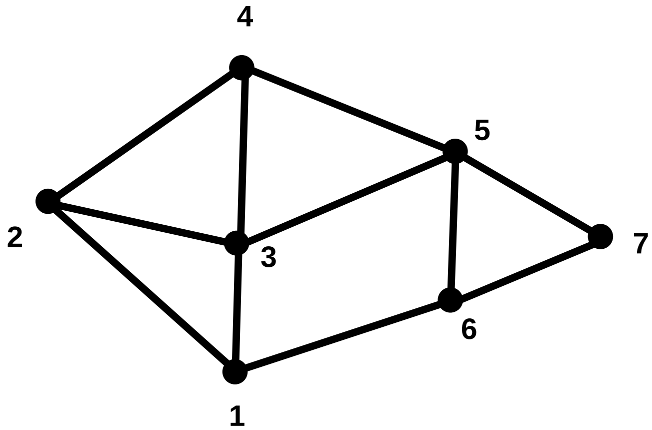
Finalmente nos queda:



Segmento Horario	Asignaturas
I	1 , 5
II	2 , 6
III	3
IV	4 , 7

Figura 9-G. Algoritmo Greedy Problema Planificación. Estado Final.

Ejemplo 2 de Coloración de Grafos:



Establecemos un Orden de vértices:

{1 , 2 , 3 , 4 , 5 , 6 , 7}.

Establecemos un Orden de Colores:

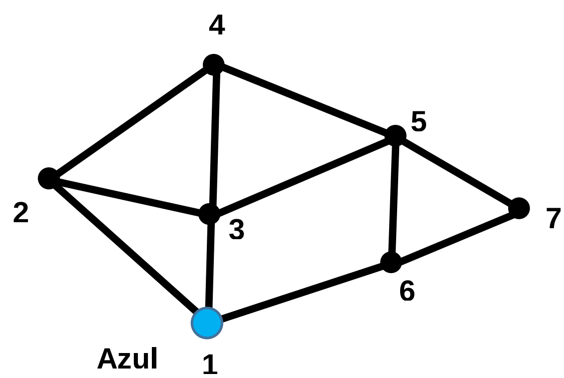
{Azul , Rojo , Verde , Amarillo}

Figura 10-A. Algoritmo Greedy Ejemplo 2. Estado Inicial del Grafo.

Apliquemos el algoritmo:

Asignamos al vértice 1 el primer color disponible (Azul):

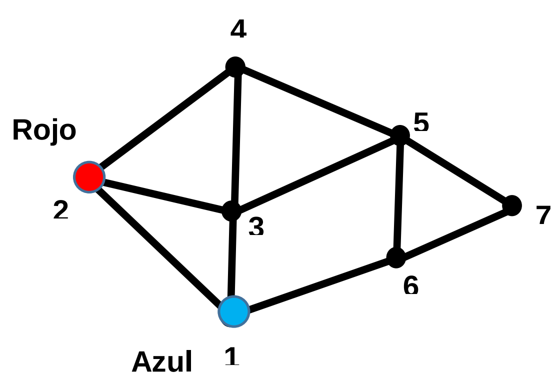
“Limpiamos Tachados” del Orden de Colores:
{Azul , Rojo , Verde, Amarillo}



Siguiendo el orden de vértices,
va el 2 que es adyacente con el 1 (Azul)
{~~Azul~~ , Rojo , Verde, Amarillo }

Usamos el primer color disponible del Orden (Rojo).

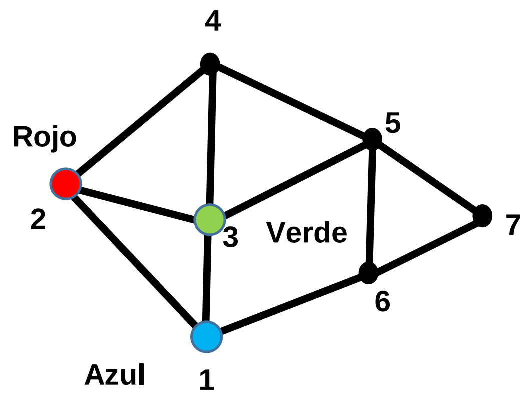
“Limpiamos Tachados” del Orden de Colores:
{Azul , Rojo , Verde, Amarillo}



Siguiendo el orden de vértices,
va el 3 que es adyacente con el 1 (Azul) y el 2 (Rojo)
{~~Azul~~ , ~~Rojo~~ , Verde, Amarillo }

Usamos el primer color disponible del Orden (Verde).

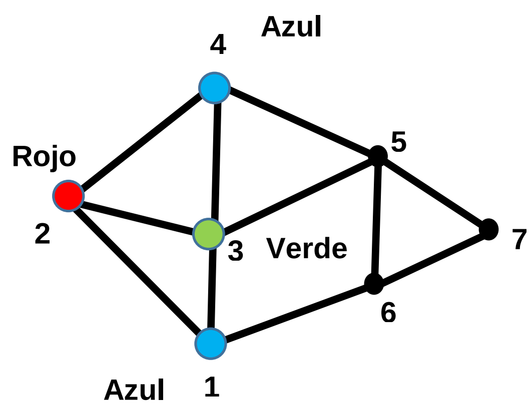
“Limpiamos Tachados” del Orden de Colores:
{Azul , Rojo , Verde, Amarillo}



Siguiendo el orden de vértices,
va el 4 que es adyacente con el 2 (Rojo) y el 3 (Verde)
{Azul , ~~Rojo~~ , ~~Verde~~, Amarillo }

Usamos el primer color disponible del Orden (Azul).

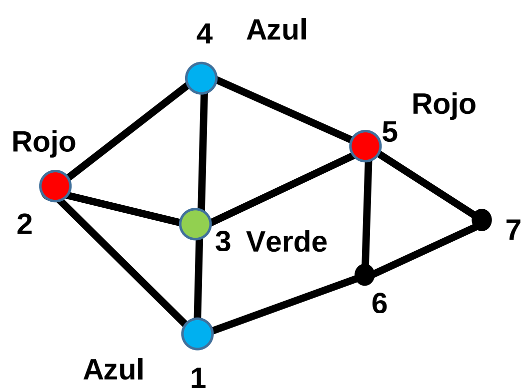
“Limpiamos Tachados” del Orden de Colores:
{Azul , Rojo , Verde, Amarillo}

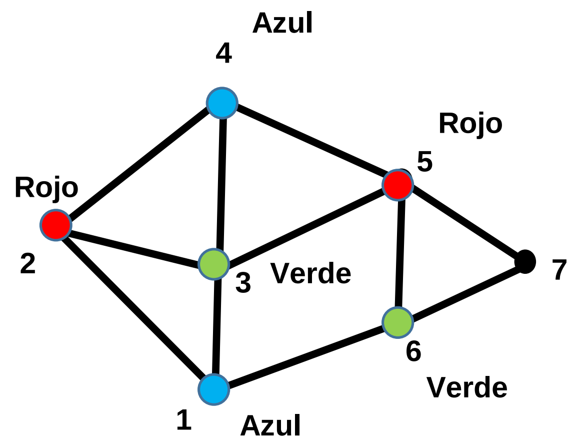
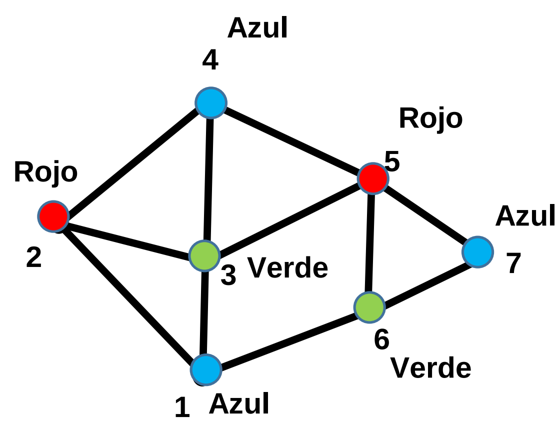


Siguiendo el orden de vértices,
va el 5 que es adyacente con el 3 (Verde) y el 4 (Azul)
{~~Azul~~ , Rojo , ~~Verde~~, Amarillo }

Usamos el primer color disponible del Orden (Rojo).

“Limpiamos Tachados” del Orden de Colores:
{Azul , Rojo , Verde, Amarillo}



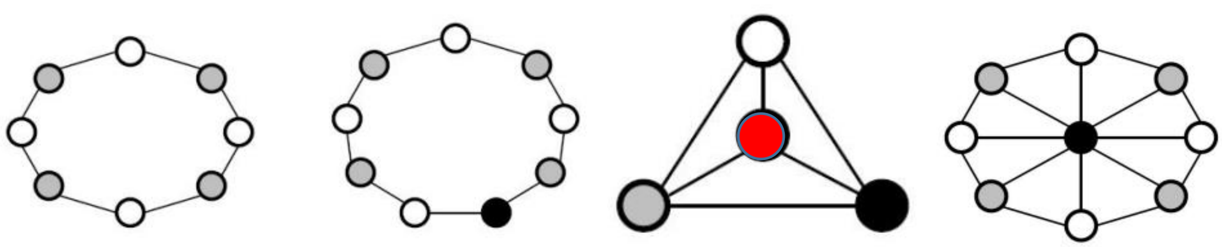
Siguiendo el orden de vértices, va el 6 que es adyacente con el 1 (Azul) y el 5 (Rojo) {~~Azul~~ , ~~Rojo~~ , Verde, Amarillo } Usamos el primer color disponible del Orden (Verde). “Limpiamos Tachados” del Orden de Colores: {Azul , Rojo , Verde, Amarillo}	
Siguiendo el orden de vértices, va el 7 que es adyacente con el 5 (Rojo) y el 6 (Verde). {Azul , ~~Rojo~~ , ~~Verde~~, Amarillo } Usamos el primer color disponible del Orden (Azul). “Limpiamos Tachados” del Orden de Colores: {Azul , Rojo , Verde, Amarillo}	

Para rematar este asunto del coloreado:

GRAFOS PLANOS: Los grafos planos son aquellos que pueden ser representados en el plano, sin que ninguna de las aristas del grafo corte a otra. Esto se ajusta a lo que hemos visto en cuanto al Teorema de los Cuatro Colores (si un grafo es plano entonces puede ser coloreado de forma factible utilizando 4 o menos colores)

En la Figura 11 podemos ver unos cuantos ejemplos de coloraciones de grafos planos. En 11(A) vemos cómo dependiendo del número de vértices del grafo cíclico (si es par o impar), son necesarios 2 o 3 colores para obtener una coloración del grafo.

En 11(B) y 11(C) vemos cómo obtener una coloración de los grafos de rueda (Wheels , Wn), que se obtienen a partir de los cíclicos añadiendo un nuevo vértice en el centro, con aristas conectando el vértice central a todos los vértices exteriores. En consecuencia, para obtener una coloración factible de dichos grafos, serán necesarios 3 o 4 colores, dependiendo de si el número de vértices del grafo es par o impar.

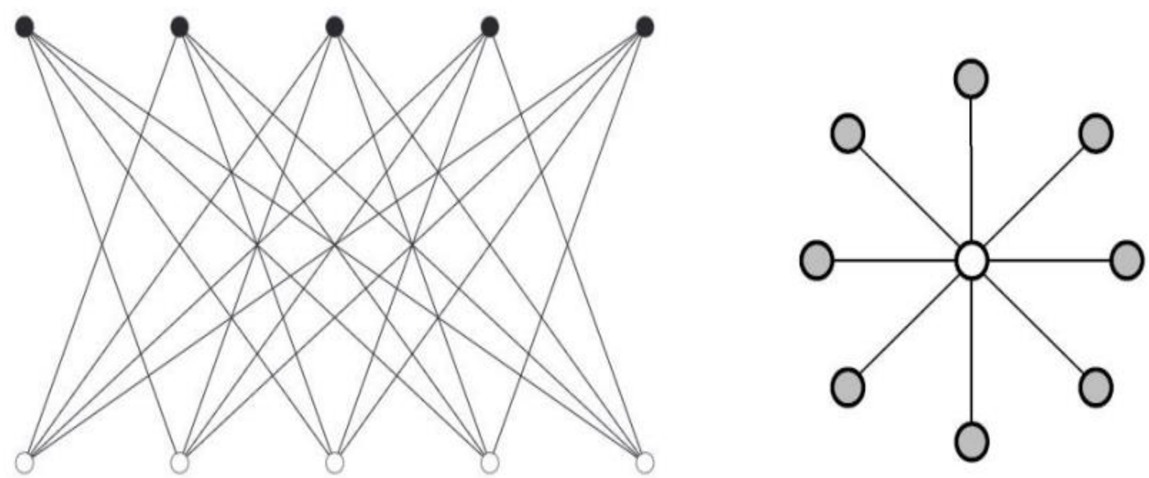


(A) Coloración de C8 y C9 (B) Coloración W4 (C) Coloración W9

Figura 11. Coloración de grafos planos

GRAFOS BIPARTITOS: Si y solo si G es bipartito entonces su número cromático (Letra Griega Chi ó Xi) $\chi(G) = 2$.

En la Figura 12 podemos ver ejemplos de coloración de grafos bipartitos, un grafo bipartito aleatorio en 12(A) y un grafo de estrella en 12(B).



(A) Grafo bipartito aleatorio (B) Grafo de estrella

Figura 12. Coloración de grafos bipartitos

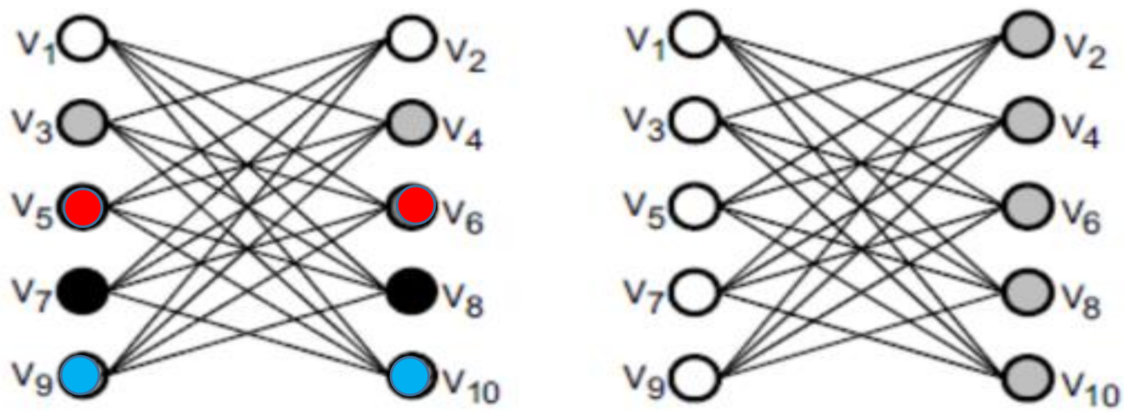
En la Figura 13 se muestra un ejemplo de cómo afecta la ordenación de los vértices a la hora de obtener una solución óptima para la coloración de un grafo.

Para el caso 13(A), vemos que el ordenamiento de vértices $\{V_1, V_2, V_3, \ldots, V_n\}$ produce una solución utilizando (n/2) colores (en este ejemplo n = 10, por lo que utiliza 5 colores).

Mientras que en el caso 13(B), se utiliza este ordenamiento

$\{V_1, V_3, \ldots, V_{n-1}, V_2, V_4, \ldots, V_n\}$,

produciendo así la solución óptima al problema, utilizando únicamente 2 colores.



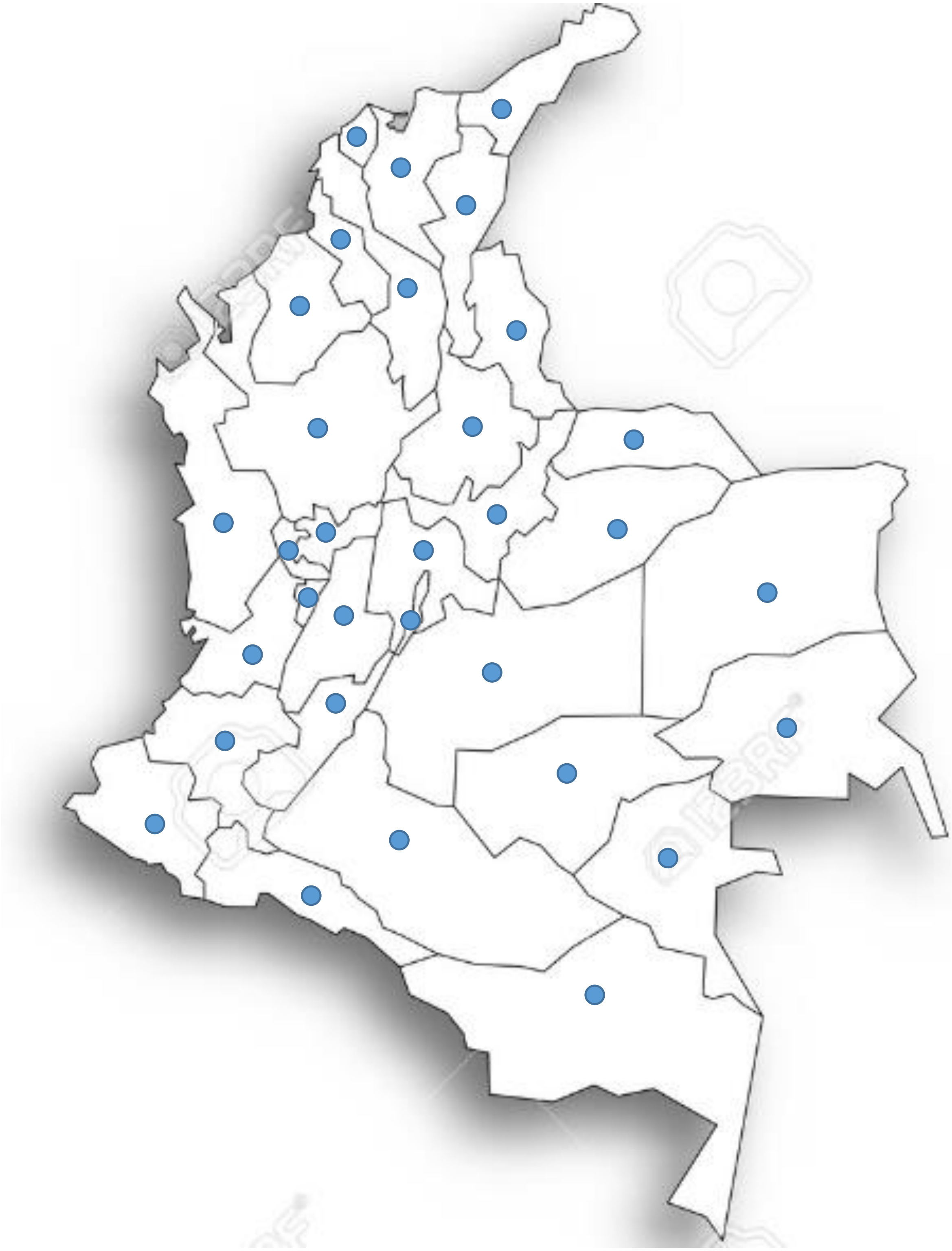
(A) Ordenamiento secuenciado. (B) Ordenamiento alternado.

Figura 13. Importancia de la ordenación de vértices

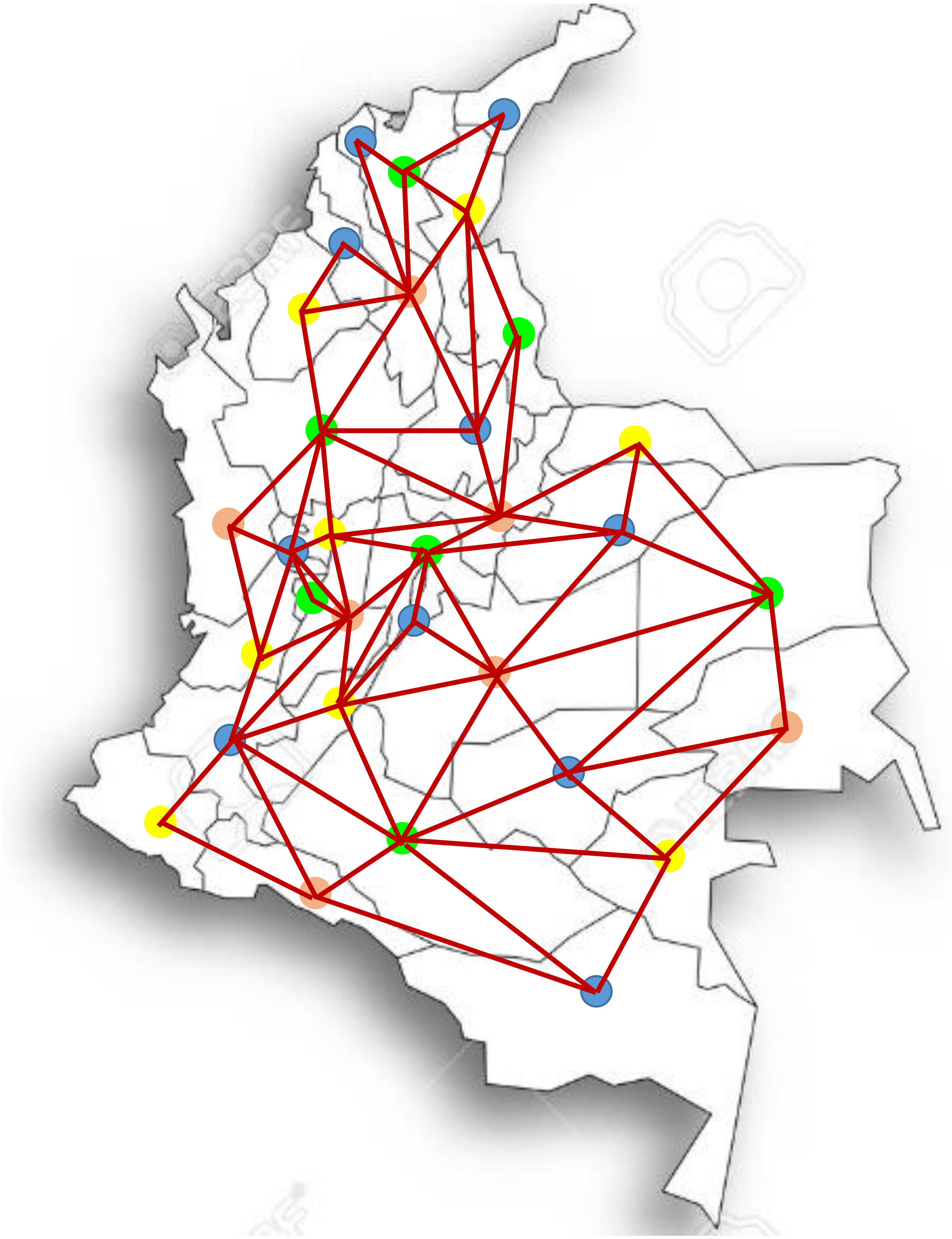
01. Aplicación inicial (original) Coloreado de Mapas.

Aquí un croquis de la división política de Colombia:

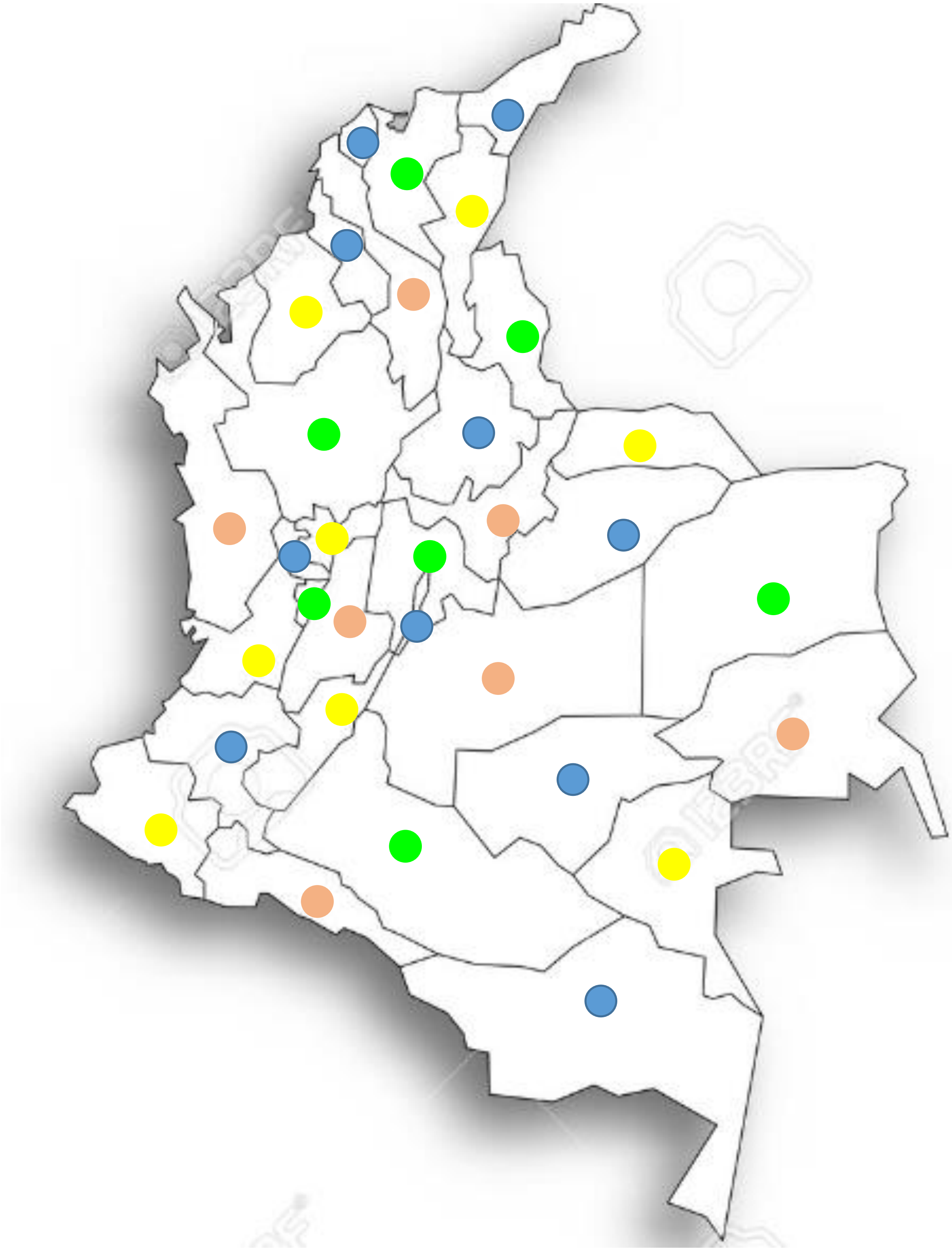
Cada división (los Departamentos y el Distrito Capital) se representan con un nodo:



Se traza una arista entre los nodos que representan departamentos que limitan entre sí (adyacentes). El grafo obtenido es PLANAR, de modo que solo se requiere un máximo de CUATRO COLORES



Y estos son los colores asignados a cada una de las divisiones:



02. Aplicación para planificación.

El Concejo municipal de una ciudad capital, ha configurado OCHO Comités, cuyos integrantes se distribuyen de la siguiente manera (en la tabla aparece el ID del Concejal):

Comité A	Comité B	Comité C	Comité D	Comité E	Comité F	Comité G	Comité H
1	6	2	1	17	5	13	4
2	7	11	14	18	16	18	19
3	8	9	10	3	10	14	20
4	9	12	15	15	17	11	21

Requieren programar reuniones semanales de TRES horas (es decir, 1 reunión a la semana con una duración de 3 horas). Siempre que un comité se reúne, el Concejo en pleno no puede reunirse, porque algunos de sus miembros estarán ocupados en las reuniones de algún comité.

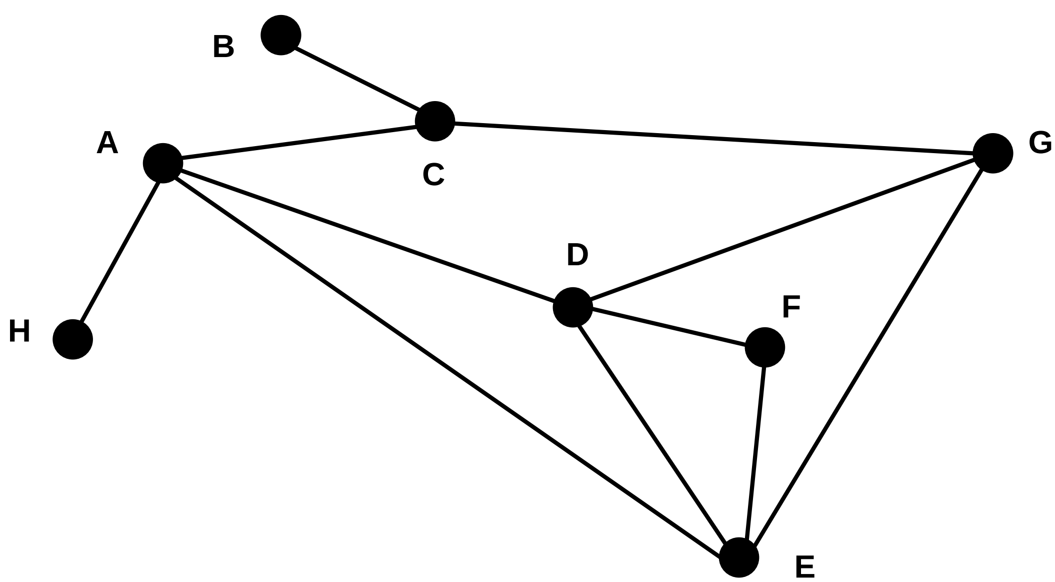
Entonces, si bien es posible programar los OCHO comités en OCHO franjas diferentes, esto consumiría 24 horas de la semana laboral, pero el Concejo quiere programar los comités para que dos o más de ellos se reúnan al mismo tiempo siempre que sea posible (en diferentes lugares claro).

Sin embargo, no todos los comités pueden reunirse al mismo tiempo, porque algunas personas son miembros de más de un comité; ¿Cuál es la mejor forma de programar estos OCHO comités?

SOLUCIÓN:

Comité A	Comité B	Comité C	Comité D	Comité E	Comité F	Comité G	Comité H
1	6	**2**	**1**	**17**	5	13	**4**
2	7	**11**	**14**	**18**	16	**18**	19
3	8	**9**	**10**	**3**	**10**	**14**	20
4	**9**	12	**15**	**15**	**17**	**11**	21

ARISTAS: **A-C, A-D, A-E, A-H, B-C, C-G, D-E, D-F, D-G, E-F, E-G**



Efectuamos esta pequeña conversión:

A	B	C	D	E	F	G	H
1	2	3	4	5	6	7	8

ARISTAS: 1-3 , 1-4 , 1-5 , 1-8 , 2-3 , 3-7 , 4-5, 4-6 , 4-7 , 5-6 , 5-7

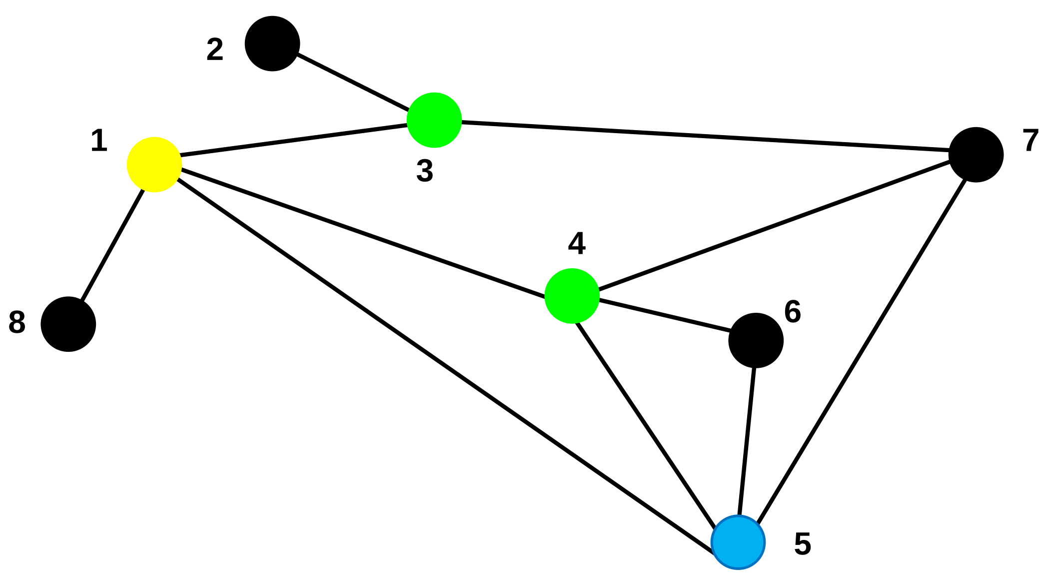
Aplicando un algoritmo Voraz:
Establecemos un Orden de vértices: {1 , 3 , 4 , 5 , 6 , 7 , 2 , 8}.
Establecemos un Orden de Colores:
{Amarillo , Verde , Azul , Rojo} Máximo cuatro pues el Grafo es PLANAR.

Asignamos al vértice 1 el primer color disponible (Amarillo).
“Limpiamos Tachados” del Orden de Colores: {Amarillo , Verde , Azul , Rojo}

Siguiendo el orden de vértices, va el 3 que es adyacente con el 1 (Amarillo)
{~~Amarillo~~ , Verde , Azul , Rojo}
Usamos el primer color disponible del Orden (Verde).
“Limpiamos Tachados” del Orden de Colores: {Amarillo , Verde , Azul , Rojo}

Siguiendo el orden de vértices, va el 4 que es adyacente con el 1 (Amarillo),
{~~Amarillo~~ , Verde , Azul , Rojo}
Usamos el primer color disponible del Orden (Verde).
“Limpiamos Tachados” del Orden de Colores: {Amarillo , Verde , Azul , Rojo}

Siguiendo el orden de vértices, va el 5 que es adyacente con el 1 (Amarillo) y el 4 (Verde)
{~~Amarillo~~ , ~~Verde~~ , Azul , Rojo}
Usamos el primer color disponible del Orden (Azul).
“Limpiamos Tachados” del Orden de Colores: {Amarillo , Verde , Azul , Rojo}

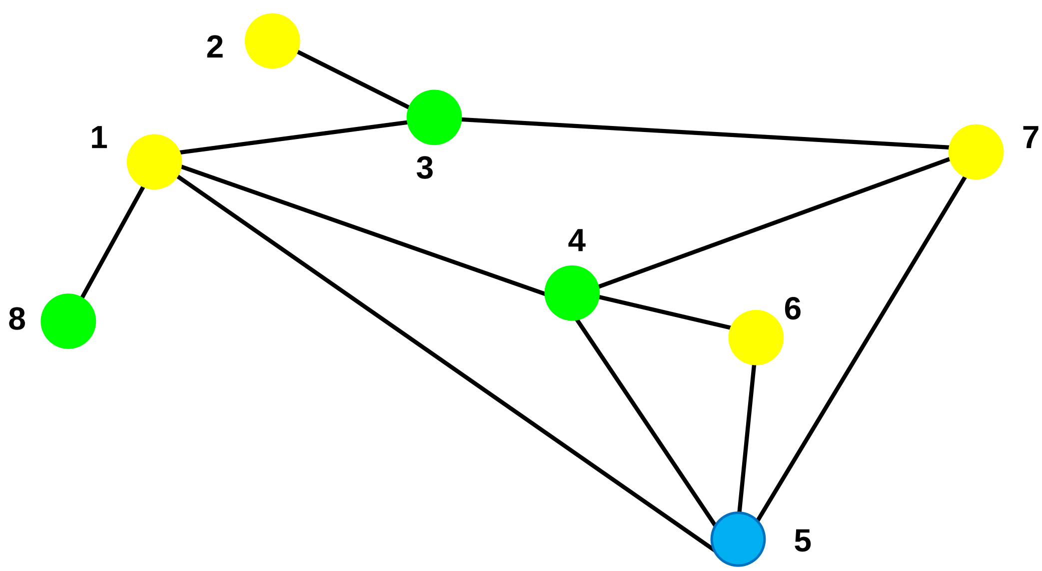


Siguiendo el orden de vértices, va el 6 que es adyacente con el 4 (Verde) y el 5 (Azul)
{Amarillo , ~~Verde~~ , ~~Azul~~ , Rojo}
Usamos el primer color disponible del Orden (Amarillo).
"Limpiamos Tachados" del Orden de Colores: {Amarillo , Verde , Azul , Rojo}

Siguiendo el orden de vértices, va el 7 que es adyacente con el 3 (Verde), el 4 (Verde) y el 5 (Azul)
{Amarillo , ~~Verde~~ , ~~Azul~~ , Rojo}
Usamos el primer color disponible del Orden (Amarillo).
"Limpiamos Tachados" del Orden de Colores: {Amarillo , Verde , Azul , Rojo}

Siguiendo el orden de vértices, va el 2 que es adyacente con el 3 (Verde)
{Amarillo , ~~Verde~~ , Azul , Rojo}
Usamos el primer color disponible del Orden (Amarillo).
"Limpiamos Tachados" del Orden de Colores: {Amarillo , Verde , Azul , Rojo}

Siguiendo el orden de vértices, va el 8 que es adyacente con el 1 (Amarillo)
{~~Amarillo~~ , Verde , Azul , Rojo}
Usamos el primer color disponible del Orden (Verde).
"Limpiamos Tachados" del Orden de Colores: {Amarillo , Verde , Azul , Rojo}



Aplicado el algoritmo Voraz se obtiene lo siguiente:

Color 1 = { 1 , 2 , 6 , 7} Color 2 = { 3 , 4 , 8 } Color 3 = { 5 }

Lo que se traduce en:

Franja	Comités
I	1 , 2 , 6 , 7
II	3 , 4 , 8
III	5

------------------------------ FIN DEL DOCUMENTO