Isomorfismos. En esta sección se revisarán esos conceptos.

Grafos isomorfos. Dos grafos son isomorfos si y solo si para alguna ordenación de vértices y aristas sus matrices de incidencia son iguales.

Los pares de grafos de la figura 1 son isomorfos. Pueden comprobarlo dando un etiquetado en uno de los elementos de cada par y etiquetando de forma idéntica los vértices correspondientes del otro elemento del par.

Figura 1. Ejemplos de grafos isomorfos

Ejemplo 1. Sean los siguientes grafos denominados G1 y G2:

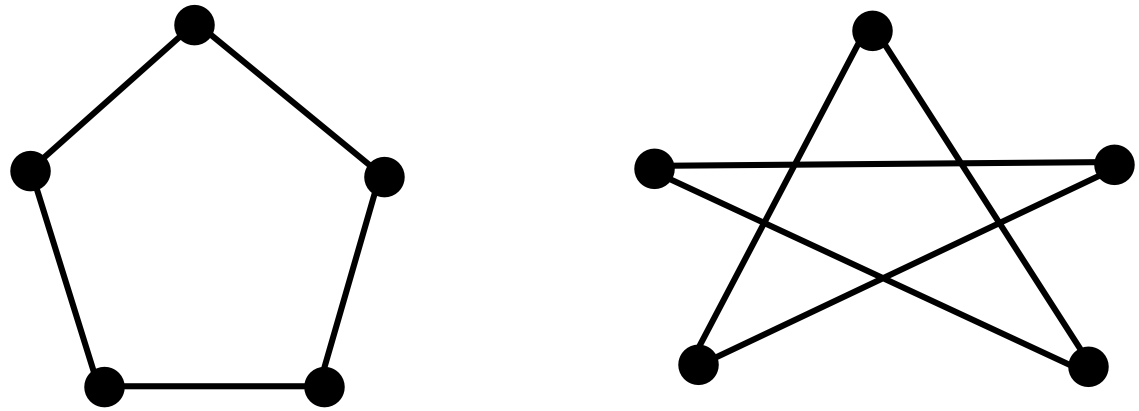


Figura 2-A. Grafos para verificar si son isomorfos

Etiquetamos el grafo de la izquierda:

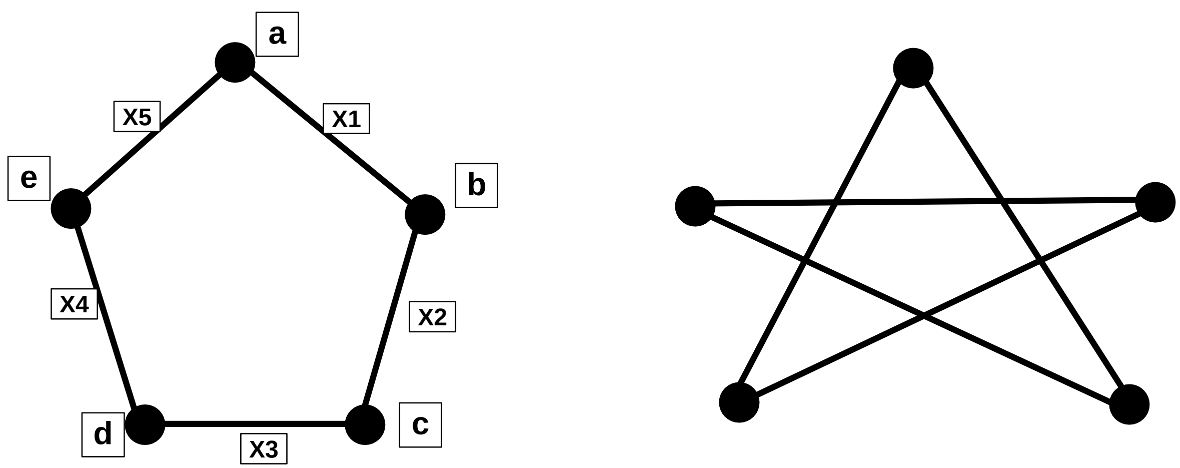


Figura 2-B. Verificación de isomorfismo. Paso 1.

Comenzamos con el vértice **a**: sus aristas X1, X5 que se mapean como Y1, Y5:
De las aristas mapeadas, relacionamos los vértices adyacentes de **a**, que son **e**, **b**.

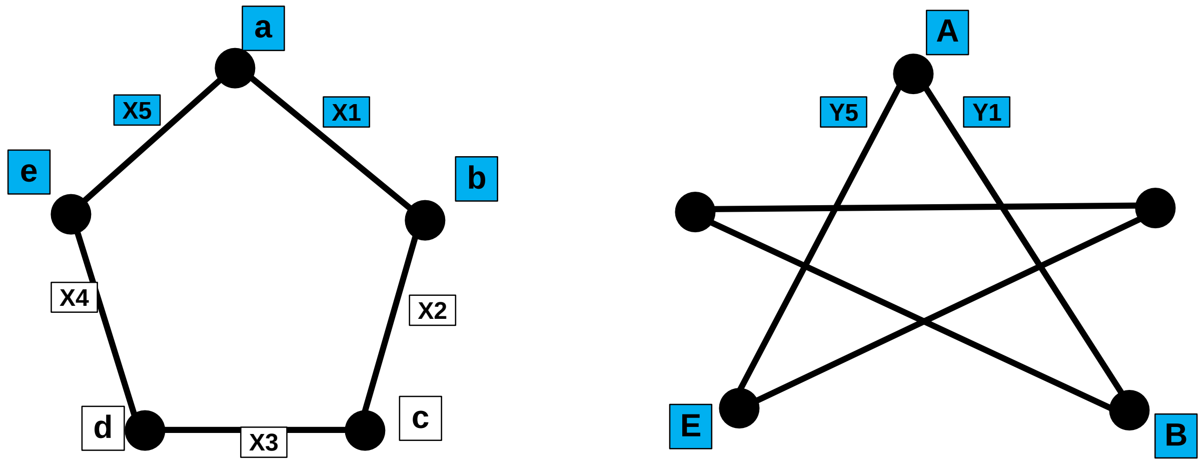


Figura 2-C. Verificación de isomorfismo. Paso 2.

Seguimos con el vértice **b**: sus adyacentes son **a** (ya mapeado como A) , **c**.
Las aristas son: **X1** (ya mapeada como Y1), **X2** .

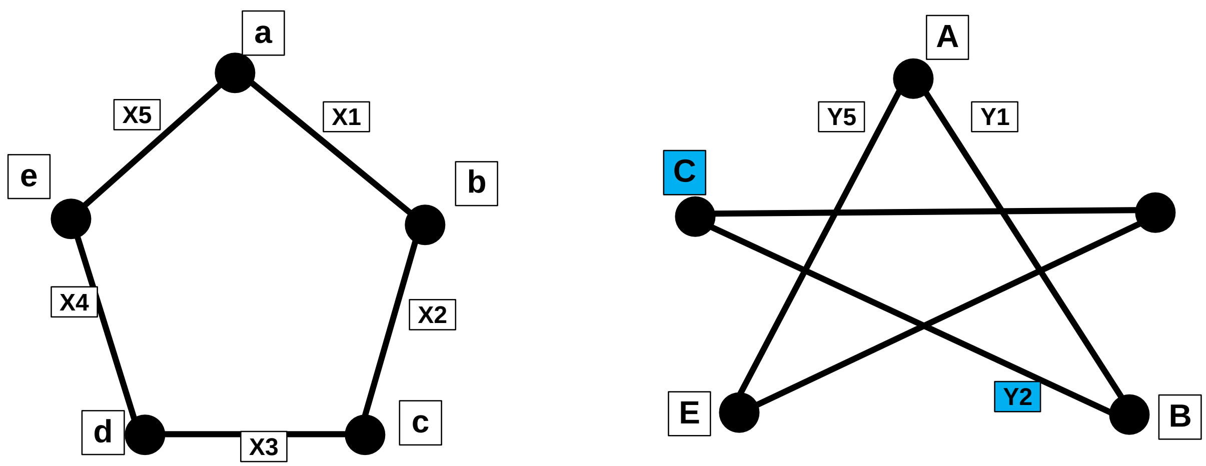


Figura 2-D. Verificación de isomorfismo. Paso 3.

Seguimos con el vértice **c**: sus adyacentes son **b** (ya mapeado como B) , **d**.
Las aristas son: **X2** (ya mapeada como Y2), **X3** .

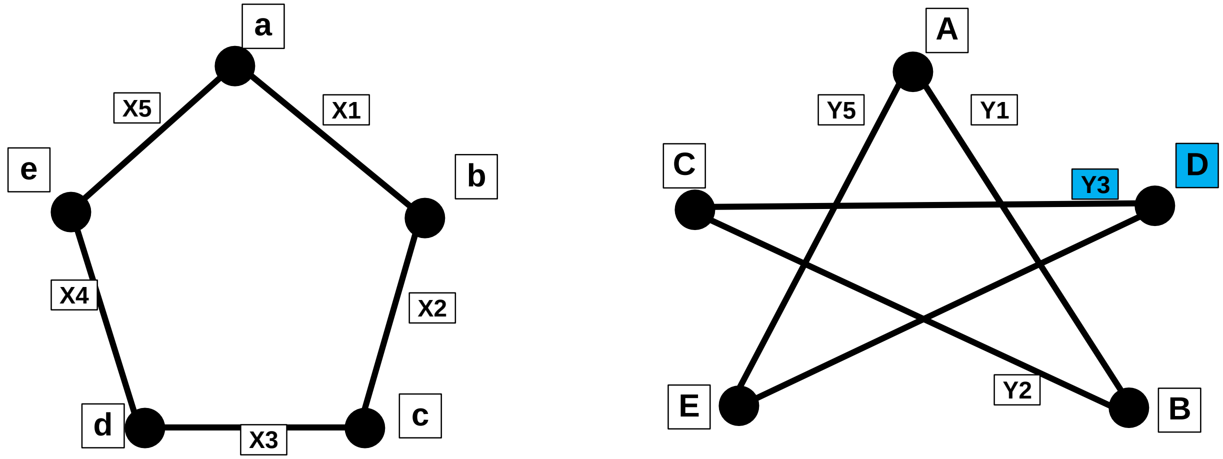


Figura 2-E. Verificación de isomorfismo. Paso 4.

Seguimos con el vértice **d**: sus adyacentes son **c** (ya mapeado como C) , **e**.
Las aristas son: **X3** (ya mapeada como Y3), **X4** .

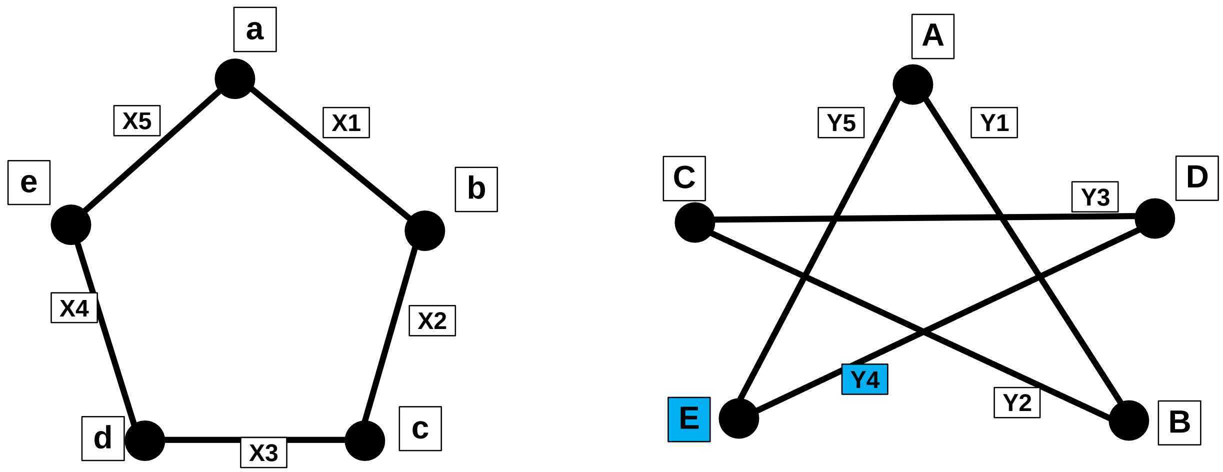


Figura 2-F. Verificación de isomorfismo. Paso 5.

Ya están mapeados todos los vértices y aristas.

y finalmente elaboramos las matrices de incidencia:

	X1	X2	X3	X4	X5
a	1				1
b	1	1			
c		1	1		
d			1	1	
e				1	1

	Y1	Y2	Y3	Y4	Y5
A	1				1
B	1	1			
C		1	1		
D			1	1	
E				1	1

Las matrices de incidencia son idénticas,
por consiguiente los grafos son isomorfos.

La verificación del isomorfismo es un problema difícil.

Para la resolución del problema se buscan datos necesariamente comunes a todos los grafos de una misma clase de isomorfía.

A estos datos se les llama invariantes de un grafo:

a) El número de vértices, |V|,

b) El número de aristas, |A|

c) la familia de los grados de los vértices, gr(x), para los $x \in V$

Que dos grafos tengan los mismos invariantes es una condición necesaria para que dos grafos sean isomorfos, pero no es una condición suficiente.

De hecho, no se conoce ningún conjunto de invariantes que sean suficientes para asegurar que dos grafos son isomorfos.

Ejemplo 2. En la figura siguiente, los grafos G1 , G2 y G3 tienen:

el mismo número de vértices,

el mismo número de aristas,

todos tienen 4 vértices de grado 2 y

tienen 2 vértices de grado 3;

pero NO son isomorfos.

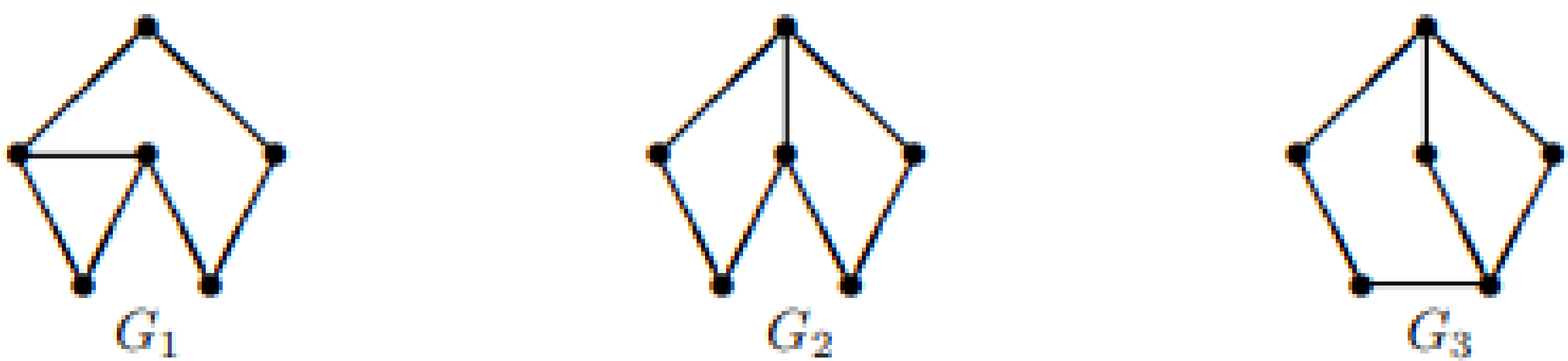
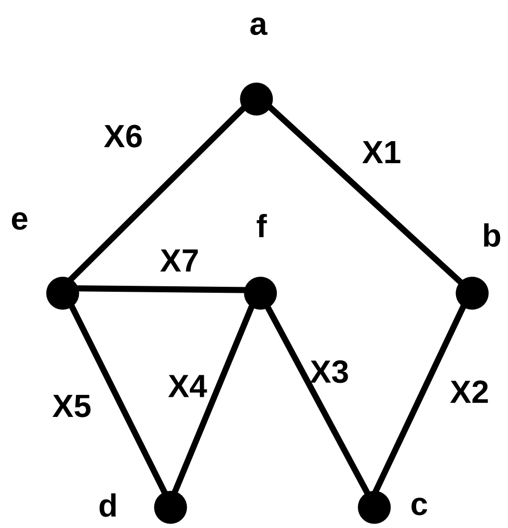


Figura 3. Grafos con invariantes comunes pero que NO SON isomorfos

Entonces, debemos comprobarlo.

COMPAREMOS G1 CON G2:

Etiquetamos el grafo de la izquierda



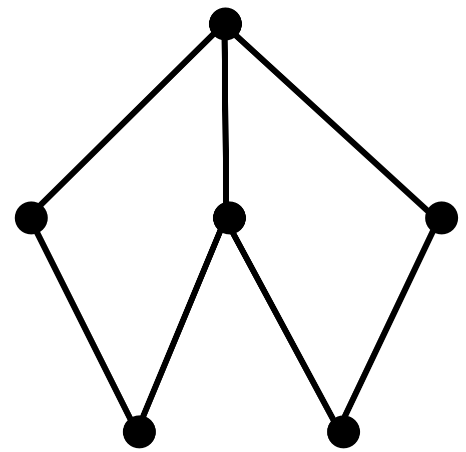


Figura 3.1-A.
Verificación de isomorfismo.
Paso 1.

Para el “mapeo” comenzamos con los vértices de mayor grado, que son:

el vértice **e** , cuyas aristas son X5, X6, X7

el vértice **f** , cuyas aristas son X3, X4, X7

Y buscamos esos vértices de grado 3 en este segundo grafo:

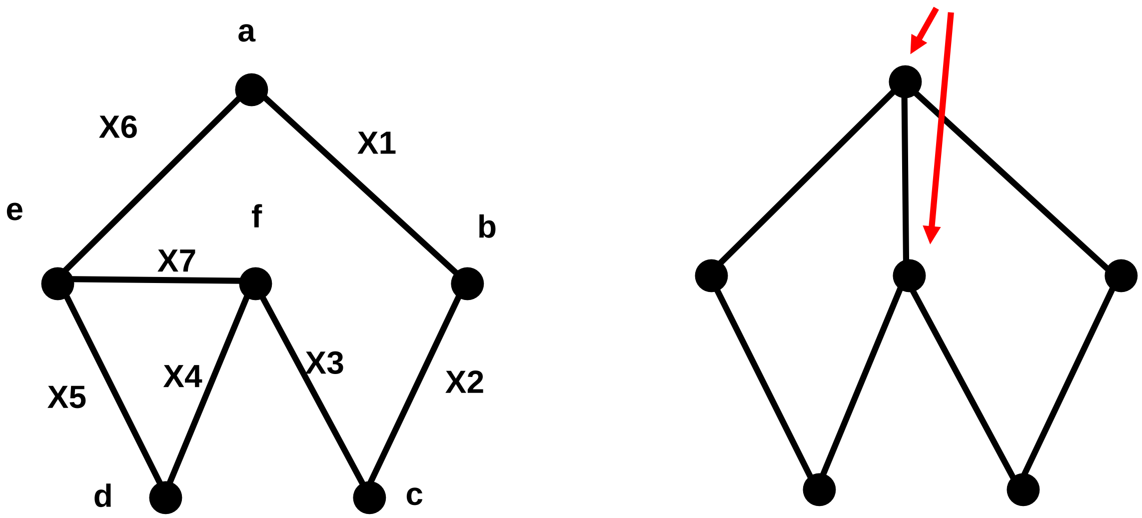


Figura 3.1-B.
Verificación de isomorfismo.
Paso 2.

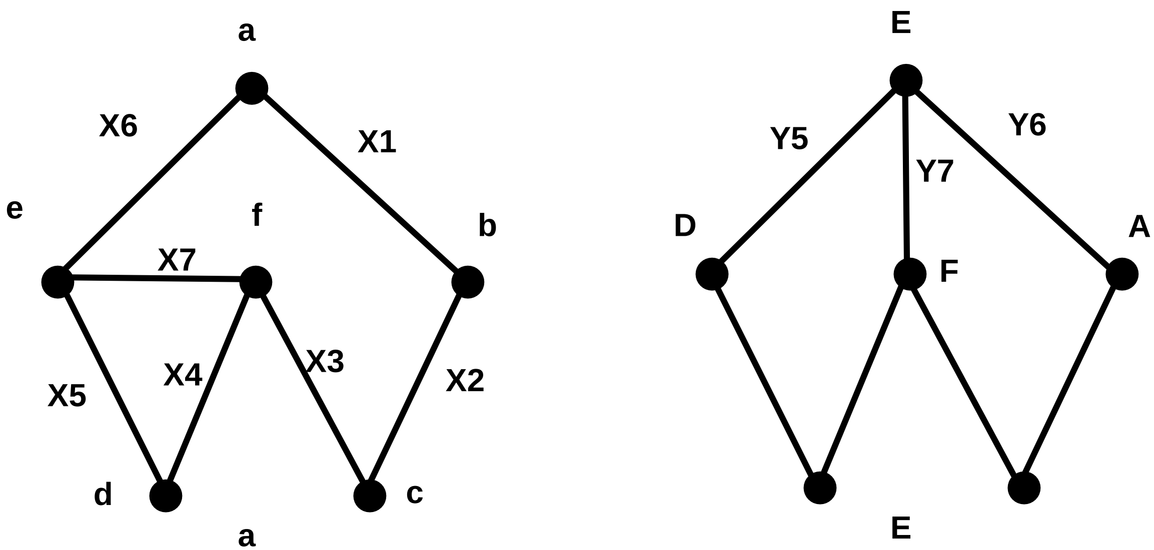


Figura 3.1-C.
Verificación de isomorfismo.
Paso 3.

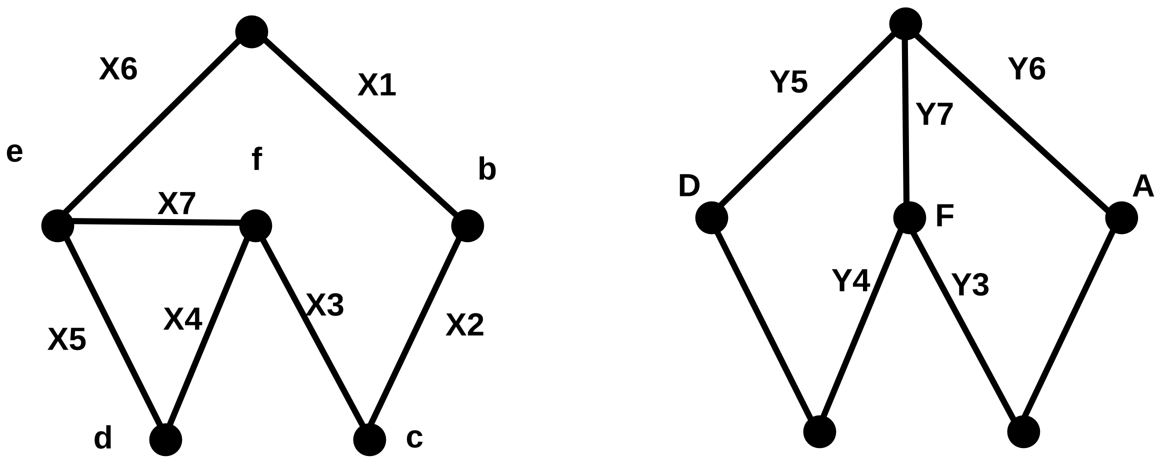
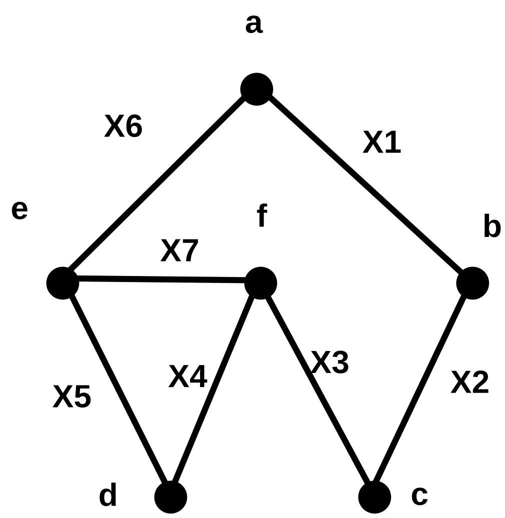


Figura 3.1-D.
Verificación de isomorfismo.
Paso 4.

En el grafo de la izquierda, el vértice a conecta con el vértice b,
y ese vértice b, conecta con el vértice c,
que finalmente conecta con el vértice f.

Es decir existe el camino <a, b, c, f > el cual NO tiene correspondencia con el grafo de la derecha.

AHORA COMPAREMOS G1 CON G3:



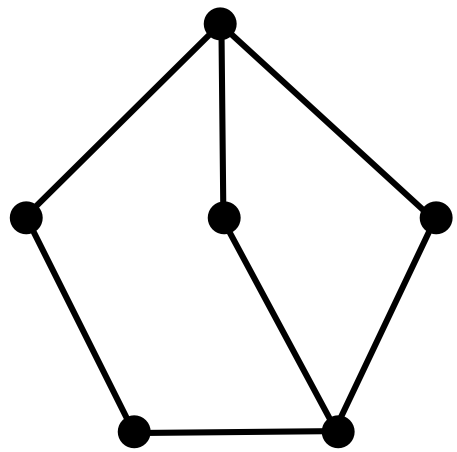


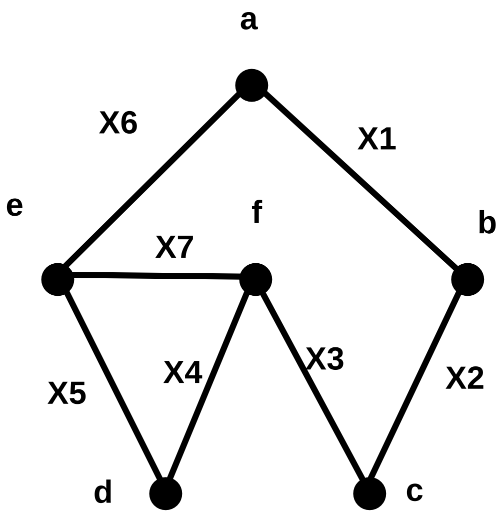
Figura 3.2-A.
Verificación de isomorfismo.
Paso 1.

Para el “mapeo” comenzamos con los vértices de mayor grado, que son:

el vértice **e** , cuyas aristas son X5, X6, X7

el vértice **f** , cuyas aristas son X3, X4, X7

Y buscamos esos vértices de grado 3 en este grafo G3:



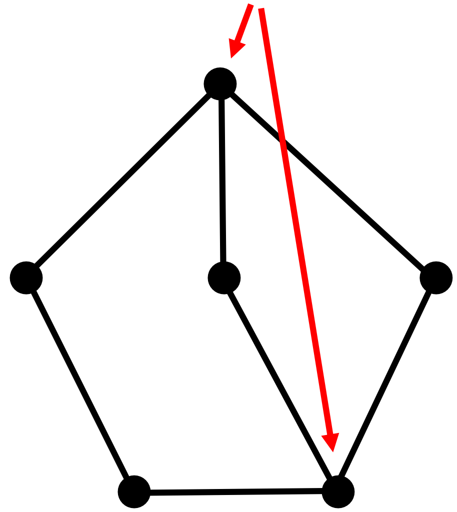
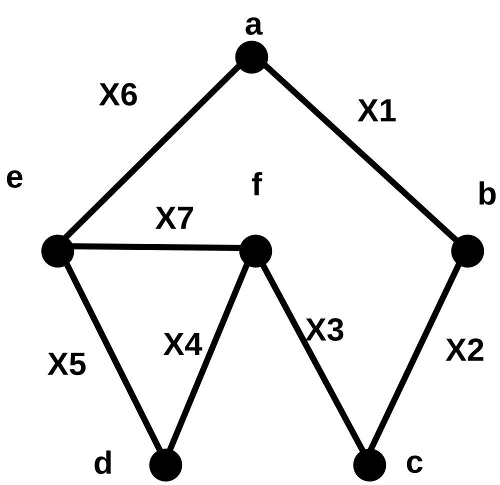
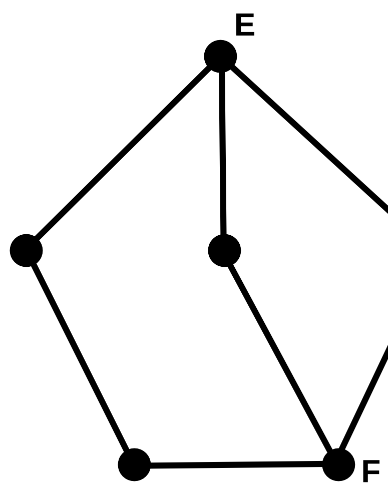


Figura 3.2-B.
Verificación de isomorfismo.
Paso 2.





Se aprecia que no está la arista que debería unir a los vértices E y F.

Por consiguiente, este proceso termina, y se comprueba que G1 y G3 NO son isomorfos.

Finalmente, comparemos los grafos G2 y G3:

Etiquetamos el grafo de la izquierda:

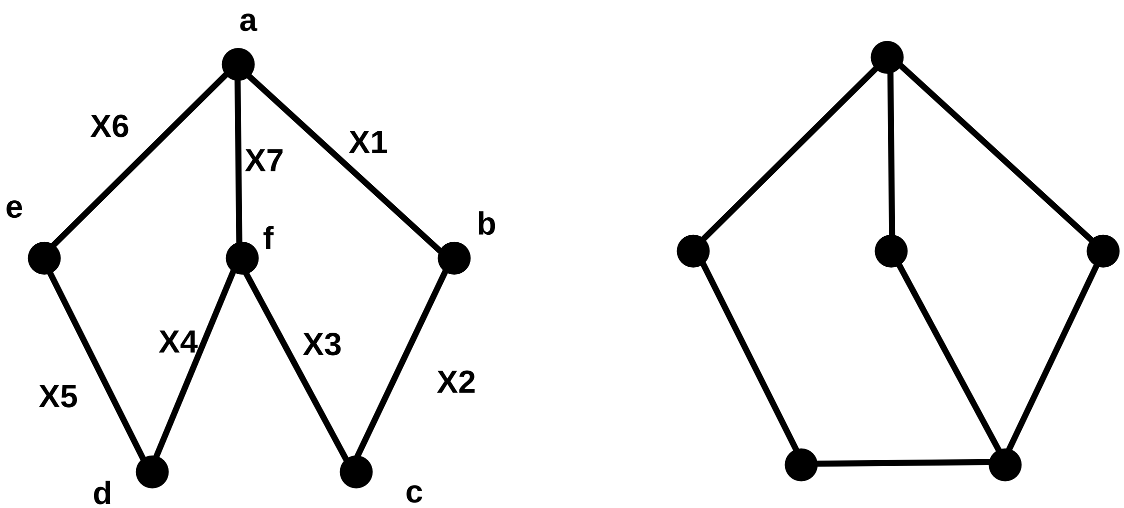


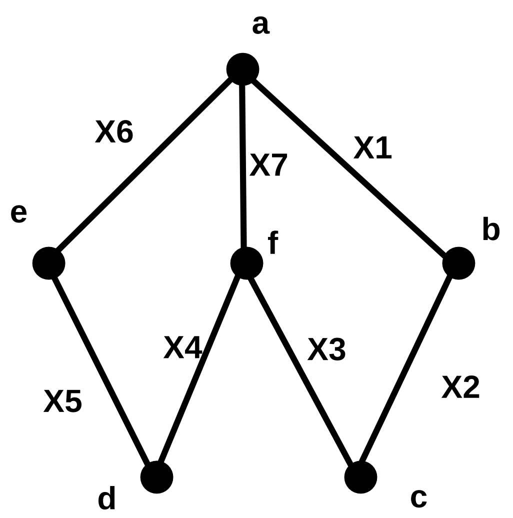
Figura 3.3-A.
Verificación de isomorfismo.
Paso 1.

Para el "mapeo" comenzamos con los vértices de mayor grado, que son:

el vértice **a** , cuyas aristas son X1, X6, X7

el vértice **f** , cuyas aristas son X3, X4, X7

Y buscamos esos vértices de grado 3 en G3:



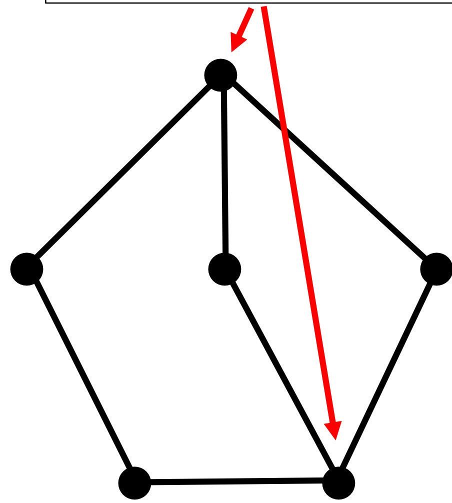
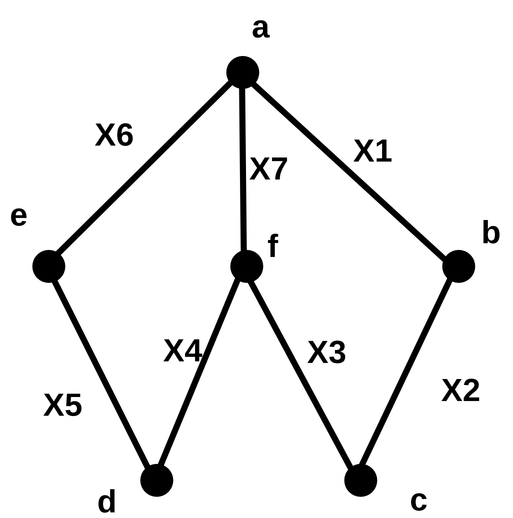
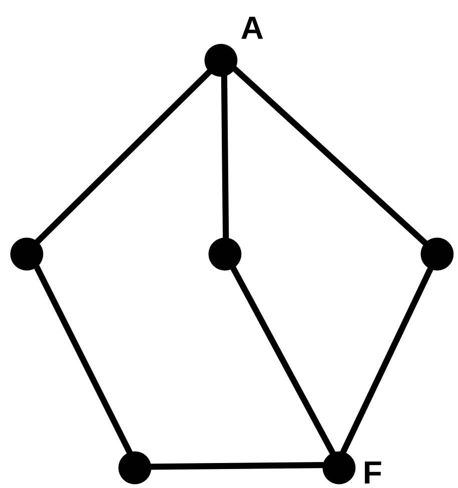


Figura 3.3-B.
Verificación de isomorfismo.
Paso 2.





Se aprecia que NO está la arista que debería unir los vértices A y F.

Por consiguiente, este proceso termina, y se comprueba que G2 y G3 NO son isomorfos.

Ejemplo 3. 6 amigos salen de vacaciones al mismo tiempo pero cada uno va a un lugar diferente. Antes de salir, deciden que al llegar a su destino cada uno de ellos enviará una postal a tres de esos amigos.

Entonces varios de ellos se plantean si es posible que cada amigo pueda recibir postales de precisamente los tres amigos a los que él les envió las suyas. Y proponen 2 grafos que representan la solución:

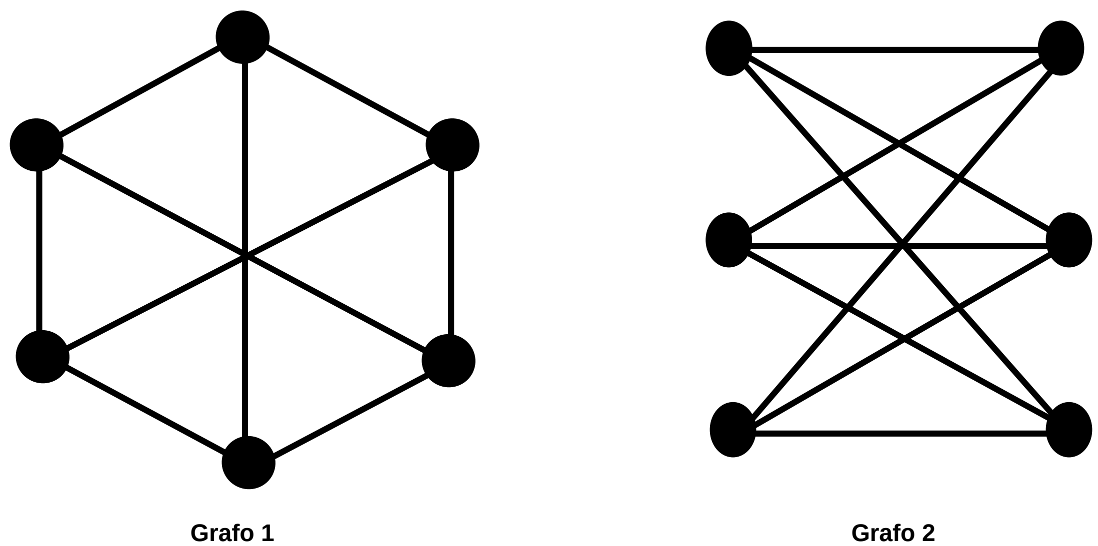


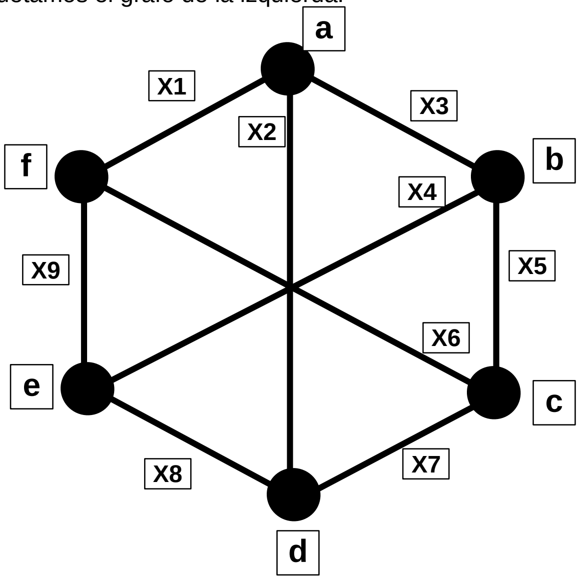
Figura 4. Grafos con invariantes comunes

La pregunta es: ¿Existe isomorfismo entre el El Grafo 1 y el Grafo 2?

Si lo hay indica que ambas alternativas son correctas al problema del envío de las postales.

Ambos grafos tienen: 6 vértices, 9 aristas, y los 6 vértices son de grado 3.

Etiquetamos el grafo de la izquierda:



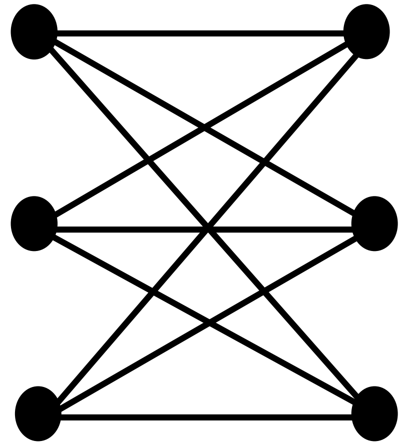
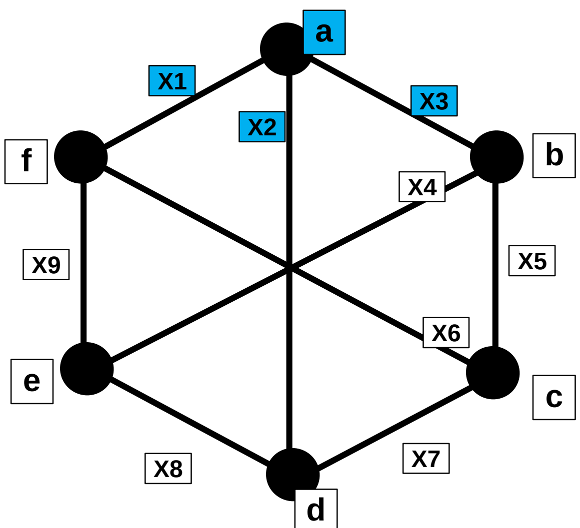


Figura 4.1.
Verificación de isomorfismo.
Paso 1.

Comenzamos con el vértice **a**: sus aristas X1, X2, X3 que se mapean como Y1, Y2, Y3:



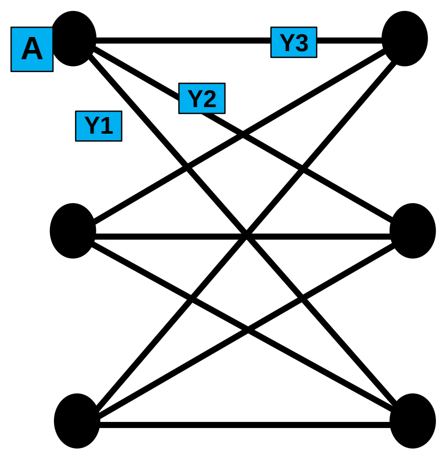


Figura 4.2.
Verificación de isomorfismo.
Paso 2.

De las aristas mapeadas, relacionamos los vértices adyacentes de **a**, que son **f** , **d**, **b**.

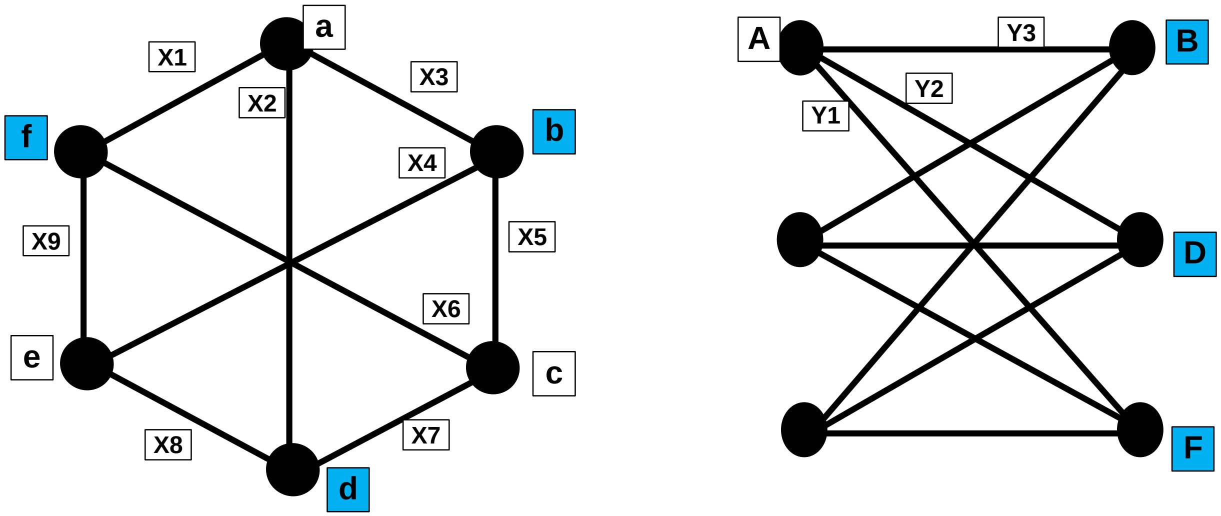


Figura 4.3.
Verificación de isomorfismo.
Paso 3.

Seguimos con el vértice **b**: sus adyacentes son **a** (ya mapeado como A) , **e**, **c**.
Las aristas son: **X3** (ya mapeada como Y3), **X4** y **X5**.

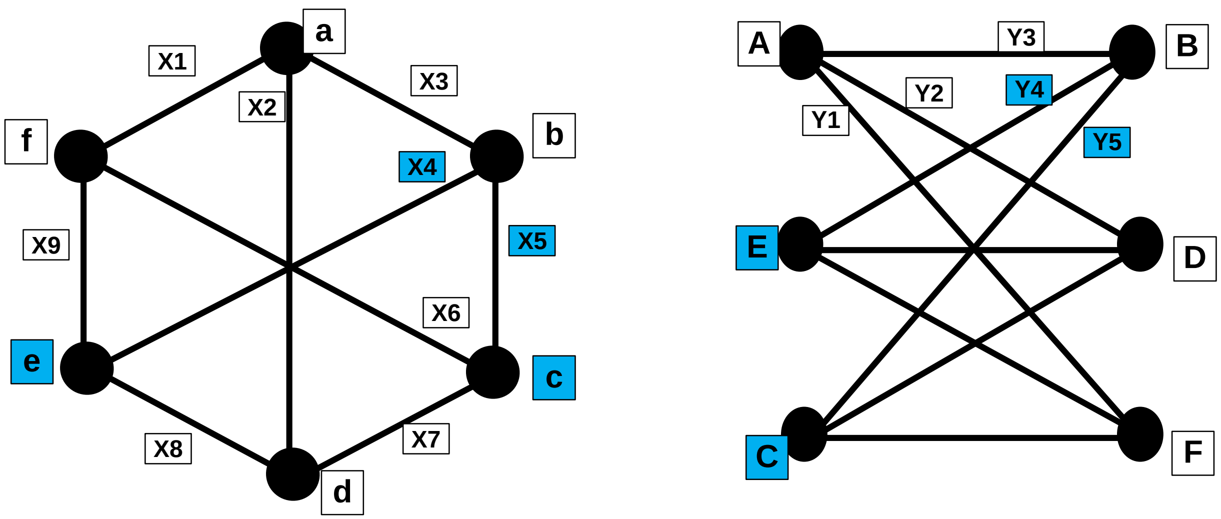


Figura 4.4.
Verificación de isomorfismo.
Paso 4.

Seguimos con el vértice **c**: sus adyacentes son **b**, **f**, **d** (ya mapeados).
Las aristas son: **X5** (ya mapeada como Y5), **X6** y **X7**.

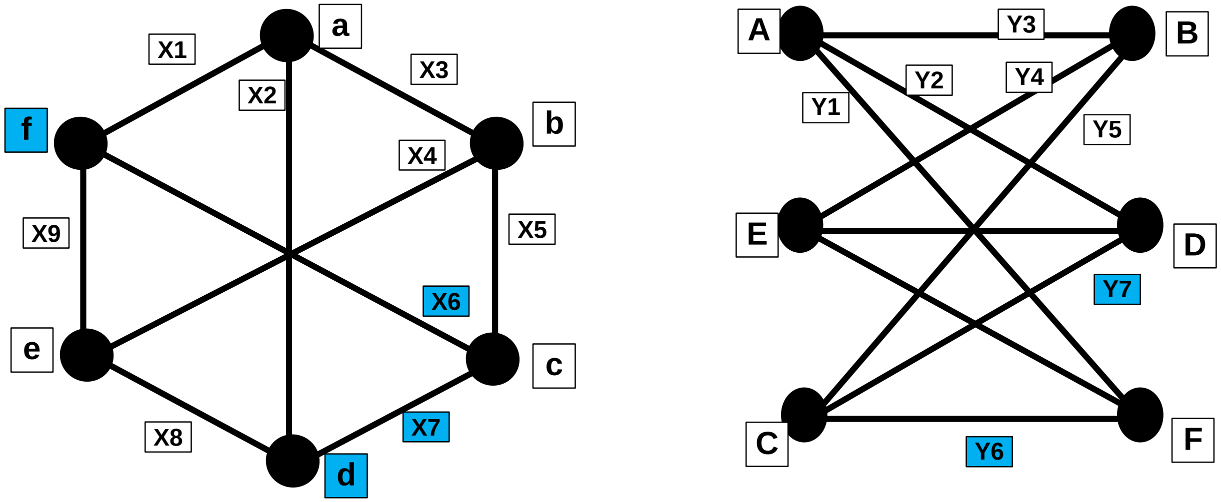


Figura 4.5.
Verificación de isomorfismo.
Paso 5.

Seguimos con el vértice **d**: sus adyacentes son **a** , **c**, **e** (ya mapeados).
Las aristas son: **X2** (ya mapeada como Y2), **X7** (ya mapeada como Y7) y **X8**.

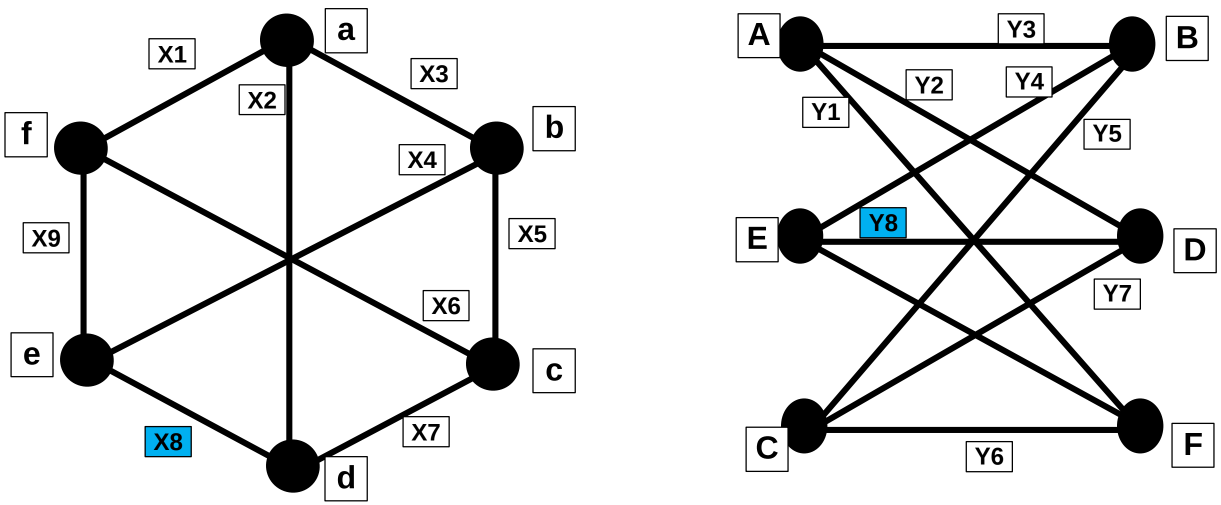


Figura 4.6.
Verificación de isomorfismo.
Paso 6.

Seguimos con el vértice **e**: sus adyacentes son **b** , **d**, **f** (ya mapeados).
Las aristas son: **X4** (ya mapeada como Y4), **X8** (ya mapeada como Y8) y **X9**

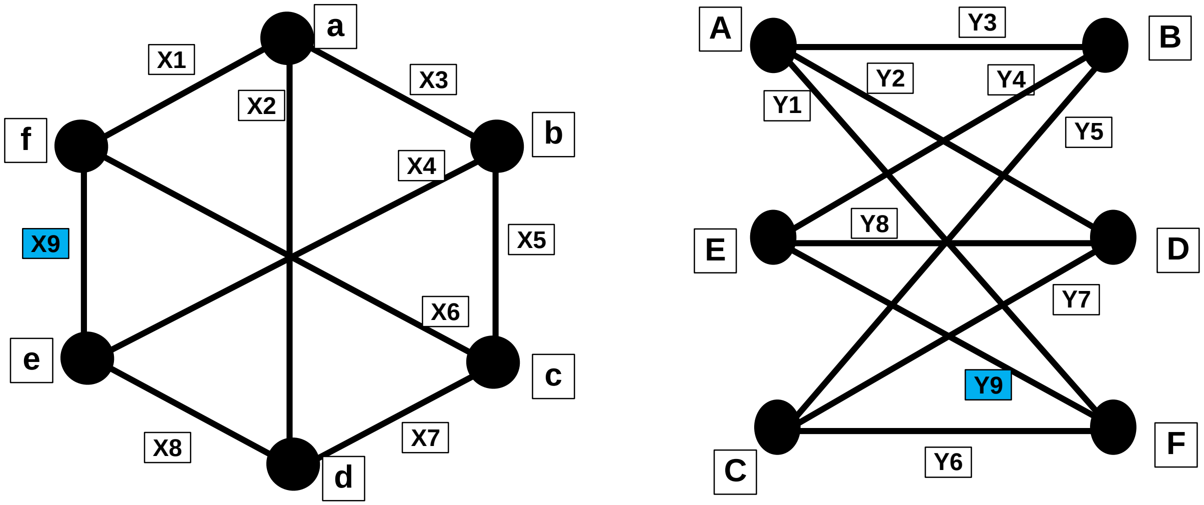


Figura 4.7.
Verificación de isomorfismo.
Paso 7.

Ya están mapeados todos los vértices y aristas.
y finalmente elaboramos las matrices de incidencia:

	X1	X2	X3	X4	X5	X6	X7	X8	X9
a	1	1	1						
b			1	1	1				
c					1	1	1		
d		1					1	1	
e				1				1	1
f	1					1			1

	Y1	Y2	Y3	Y4	Y5	Y6	Y7	Y8	Y9
A	1	1	1						
B			1	1	1				
C					1	1	1		
D		1					1	1	
E				1				1	1
F	1					1			1

Las matrices de incidencia son idénticas,

por consiguiente, los grafos son isomorfos.

-- FIN DEL DOCUMENTO