0. Ambientación

En general, un grafo es una manera de representar relaciones que existen entre pares de objetos. Así, un grafo es un conjunto de objetos, llamados vértices[1], y relaciones entre objetos que establecen una relación entre pares de vértices, representadas por aristas.

Definición 1. Un grafo se define como un par G = (V, A), donde V es un conjunto finito no vacío de vértices y A es un conjunto de pares de vértices de V, es decir, las aristas.

Definición 2. Un grafo G se define como un par ordenado, G = (V, A), donde V es un conjunto finito y A es un conjunto que consta de dos elementos de V.

[1] La terminología de la teoría de grafos NO es estándar. El concepto de vértice también se referencia como nodo. Asimismo, aristas (edges en inglés) y arcos denotan el mismo elemento.

En algunos libros, sin embargo, se establece una diferencia entre aristas (unen vértices en un grafo no dirigido) y arcos (unen vértices en grafos dirigidos). En este documento, se dará preferencia a los términos vértice y arista.

PARTE 1. CONCEPTOS FUNDAMENTALES

1. Grafos dirigidos y no dirigidos. Dependiendo del tipo de relación entre los vértices del grafo, se definen distintos tipos de grafos. Así se distinguen aristas dirigidas y no dirigidas:

Arista dirigida: es aquella que define un par ordenado de vértices (u , v), donde el primer vértice u es el origen de la arista y el segundo vértice v es el término (o vértice final).

El par (u , v) ≠ (v , u).

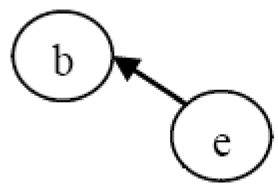


Figura 1. Ejemplo de arista dirigida.

Arista no dirigida: aquella que define un par no ordenado de vértices (u , v), donde (u , v) = (v , u).

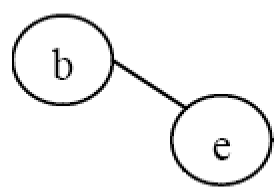


Figura 2. Ejemplo de arista NO dirigida.

De esta forma se distinguen entre grafos dirigidos y grafos no dirigidos.

Grafo dirigido: Es aquel cuyas aristas son dirigidas. Los grafos dirigidos suelen representar relaciones asimétricas, por ejemplo: relaciones de herencia, red de agua (acueducto), etc.

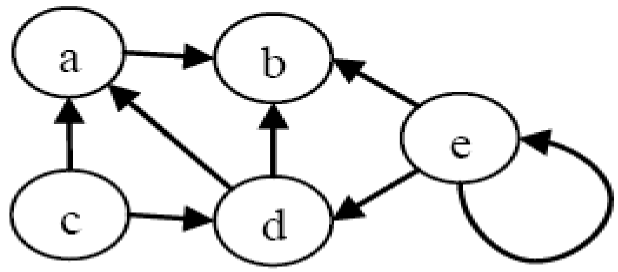


Figura 3. Ejemplo de Grafo Dirigido.

Grafo no dirigido: Es aquel cuyas aristas son no dirigidas. Representan relaciones simétricas como relaciones de hermandad y colaboración, conexiones de transportes, etc.

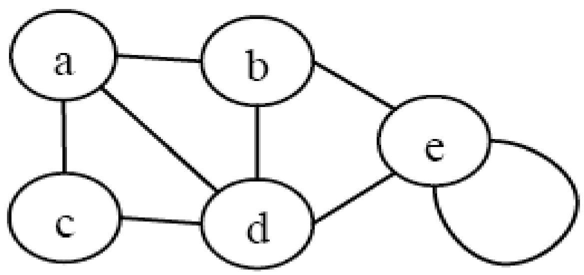


Figura 4. Ejemplo de Grafo NO dirigido.

2. Incidencia, adyacencia y grado de un vértice. Sea un grafo G = (V, A), los vértices u y v pertenecientes a V; y una arista (u,v) perteneciente a A, se tiene:

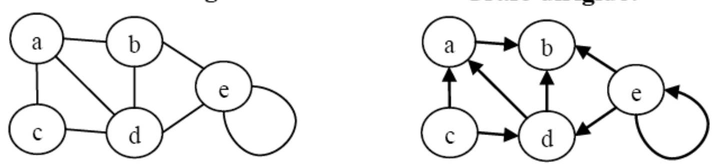
Incidencia: la arista (u,v) es incidente con los vértices u y v.

Adyacencia: Dos vértices u y v son adyacentes si existe una arista que permita:
El vértice u es adyacente a v **Y** el vértice v es adyacente desde u

Grado: El grado de un vértice u es el número de vértices adyacentes a u. Para un grafo dirigido, el grado de salida de un vértice u es el número de vértices adyacentes desde u, mientras que el grado de entrada de un vértice u es el número de vértices adyacentes a u.

La Figura 5 muestra los grados de los vértices para un grafo no dirigido y un grafo dirigido.

Grafo no dirigido: **Grafo dirigido**:



Grado (a) = 3	GradoE (a) = 2	GradoS (a) = 1
Grado (b) = 3	GradoE (b) = 3	GradoS (b) = 0
Grado (c) = 2	GradoE (c) = 0	GradoS (c) = 2
Grado (d) = 4	GradoE (d) = 2	GradoS (d) = 2
Grado (e) = 4	GradoE (e) = 1	GradoS (e) = 3

Figura 5. Grado de los vértices en un grafo no dirigido y dirigido.

La suma de los grados de los vértices es el doble del número de aristas.

A esta propiedad se le conoce como el "Teorema de los apretones de manos".

3. Grafos valorados y grafos etiquetados. Un **grafo valorado** (o ponderado) es una TERNA <V, A, f> donde <V, A> es un grafo y f es una función cualquiera, denominada **función de coste**, que asocia un valor o peso a cada arista en el grafo. El peso de un camino en un grafo con pesos es la suma de los pesos de todas las aristas atravesadas.

En un **grafo etiquetado**, la función f tiene como imagen un conjunto de **etiquetas no numéricas**.

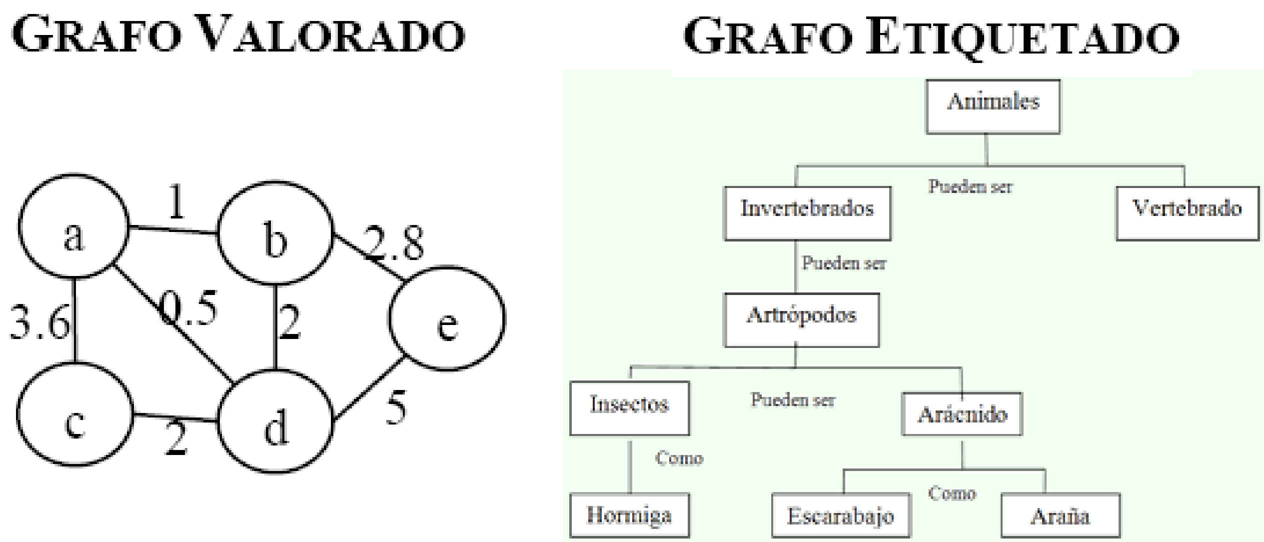


Figura 6. Ejemplo de Grafo Valorado y de Grafo Etiquetado.

4. Camino, Bucle y Ciclo. Es muy importante distinguir estos tres conceptos.

Un CAMINO es una secuencia que alterna vértices y aristas que comienza por un vértice y termina en vértice tal que cada arista es incidente a su vértice predecesor y sucesor. Es decir, un camino es una sucesión de vértices **V: <v_0, v_1, v_2, … v_k>** que cumple:

$$(v_i, v_{i+1}) \in A \ \forall \ i \in \{0 \ldots k-1\}$$

La ***longitud k*** del camino está dada por el número de aristas.

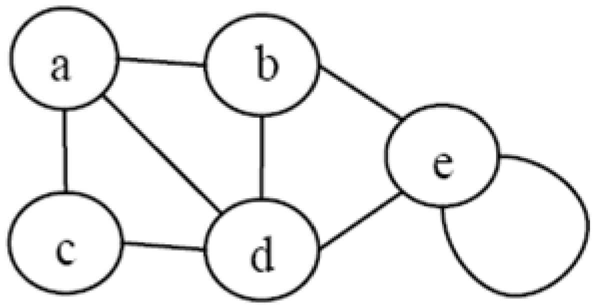
Un camino es simple **si cada vértice en el camino es distinto**, **excepto** posiblemente por el primero y el último vértice.

Un BUCLE es un camino de longitud 1 que comienza y termina en el mismo vértice.

Un CICLO o CIRCUITO es un camino simple **<v_0 … v_k>** que cumple las siguientes restricciones:

$v_0 = v_k$
Si es no dirigido, k = 1 (es un bucle) o k ≥ 3.

GRAFO NO DIRIGIDO:



<a,c,d,a,b,e>: camino de longitud 5.

<a,b,e,d,c>: camino simple de longitud 4.

<b,e,d,b>: ciclo de longitud 3.

<a,e>: no es un camino.

<*e*,*e*>: camino, bucle y ciclo.

Figura 7. Caminos, ciclos y bucles en un grafo dirigido y no dirigido.

5. Grafo Conexo, Fuertemente y Débilmente. Se puede apreciar lo siguiente:

Un grafo no dirigido es conexo si existe un camino entre cada par de vértices.

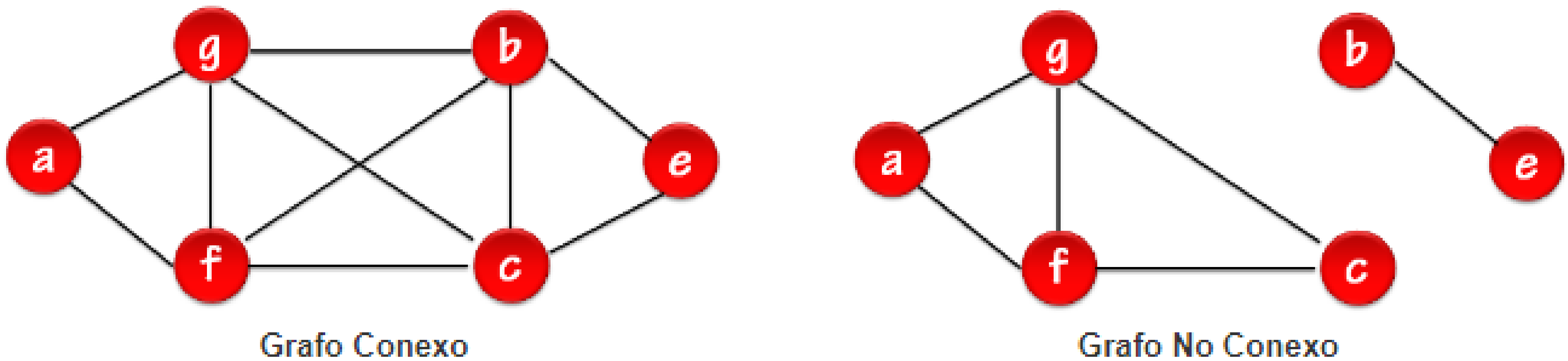


Figura 8. Ejemplo de Grafo No Dirigido Conexo y Grafo No Dirigido No Conexo.

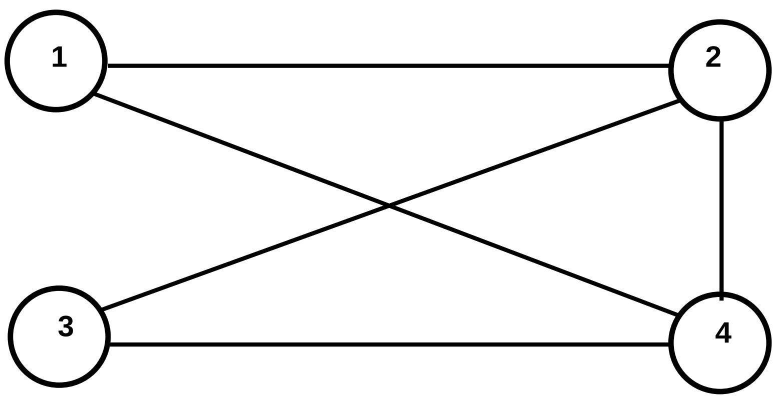
6. Representaciones de un grafo.
En esta sección se mencionan 3 estilos.

Matriz de adyacencia. La matriz de adyacencia de un grafo

$\mathbf{G = (V, E)}$ es una matriz lógica $\mathbf{A = (a_{i\,j})}$ de orden VxV donde $\mathbf{(a_{i\,j}) = 1}$ si existe una arista entre los vértices $\mathbf{V_i}$ y $\mathbf{V_j}$.

En los grafos NO dirigidos normalmente la matriz A es simétrica[2].

En la matriz de adyacencia de un grafo NO dirigido la suma de los elementos de cada fila es igual al grado de ese vértice.



	1	**2**	**3**	**4**
1	0	**1**	0	**1**
2	**1**	0	**1**	**1**
3	0	**1**	0	**1**
4	**1**	**1**	**1**	0

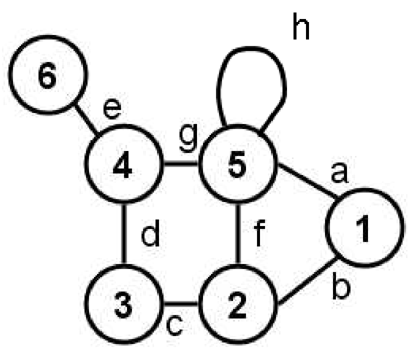
1: Existencia de la arista
0: NO Existencia de la arista

Figura 9. Ejemplo de un Grafo NO Dirigido y su matriz de adyacencia correspondiente.

[2] Una matriz es simétrica si es una matriz cuadrada, la cual tiene la característica de ser igual a su transpuesta.
Se llama matriz transpuesta de A a la matriz que se obtiene cambiando ordenadamente las filas por las columnas.

Matriz de incidencia. Sea G = {V,A} un grafo NO dirigido con **n** vértices y **m** aristas. Se denomina matriz de incidencia **I** a la matriz de orden **n** x **m** compuesta de los siguientes elementos:

0	si el vértice i	NO es incidente	con la arista j.
1	si el vértice i	es incidente	con la arista j.
2	si la arista j	es un bucle	en el vértice i.



	a	*b*	*c*	*d*	*e*	*f*	*g*	*h*
1	**1**	**1**	0	0	0	0	0	0
2	0	**1**	**1**	0	0	**1**	0	0
3	0	0	**1**	**1**	0	0	0	0
4	0	0	0	**1**	**1**	0	**1**	0
5	**1**	0	0	0	0	**1**	**1**	**2**
6	0	0	0	0	**1**	0	0	0

Como se puede apreciar, en las filas están los vértices del grafo, y en las columnas están las aristas.

Si se revisa, por ejemplo, el vértice 2 (fila 2), vemos que en la intersección con las columnas **b**, **c** y **f** tiene un 1, esto quiere decir, que el vértice 2 es incidente con las aristas **b**, **c** y **f**.

En el caso de los bucles se cuenta como 2 tal como sucede en la intersección de la fila 5 con la columna h.

Figura 10. Ejemplo de un Grafo NO Dirigido y su matriz de incidencia correspondiente.

Para las matrices de incidencia también se cumplen una serie de propiedades:

1. Si el grafo G es NO dirigido, la suma de los elementos de cada fila de la matriz de incidencia es igual al grado del correspondiente vértice.

2. Si el grafo G es NO dirigido, la suma de los elementos de cada columna de la matriz de incidencia debe ser igual a 2. Cada arista tiene un vértice en cada extremo, dos en total, no puede tener más.

Listas. La principal desventaja de usar la matriz de adyacencia es que para leer o examinar la matriz se requiere un tiempo de **O(n^2)**. Para evitar esta desventaja se puede usar otra representación llamada lista de adyacencia.

La lista de adyacencia de un vértice i es una lista, en algún orden, de todos los vértices adyacentes a i.

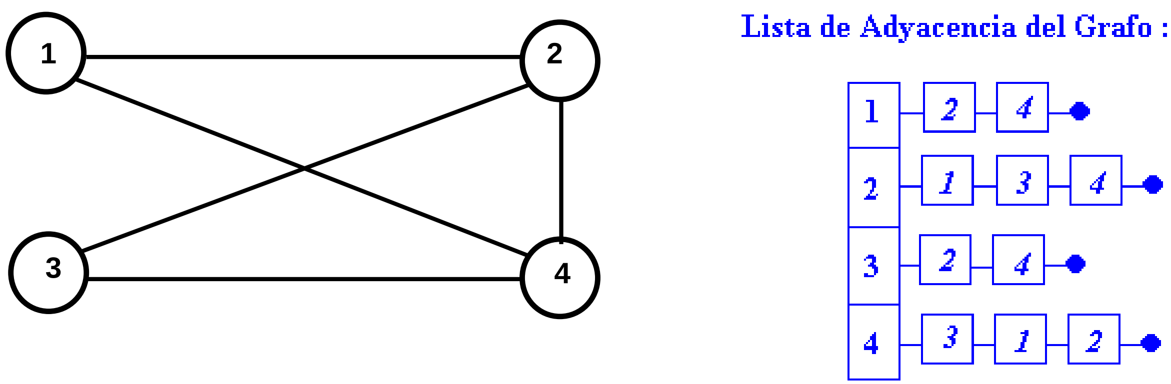


Figura 11. Ejemplo de un Grafo NO Dirigido y su Lista de adyacencia correspondiente.

La representación mediante lista de adyacencia se usa cuando el número de aristas es mucho menor a **n^2**.

Si el número de aristas es cercano a **n^2** entonces no hay mayor diferencia de desempeño si se compara a una lista de adyacencia con una matriz de adyacencia.

Desventaja: puede tomar un tiempo O(n) para determinar si hay una arista del vértice i al j.

7. Subgrafos y complementos. En esta sección se revisarán esos conceptos.

<u>*Subgrafo.*</u> La figura 12 permite observar dos grafos no dirigidos, G es un grafo que posee 4 vértices y 6 aristas, en este caso es el grafo original; mientras G' es el subgrafo de G. Como podemos observar G' cumple todas las condiciones de subgrafo, es decir, V' es subconjunto de V y E' es subconjunto de E.

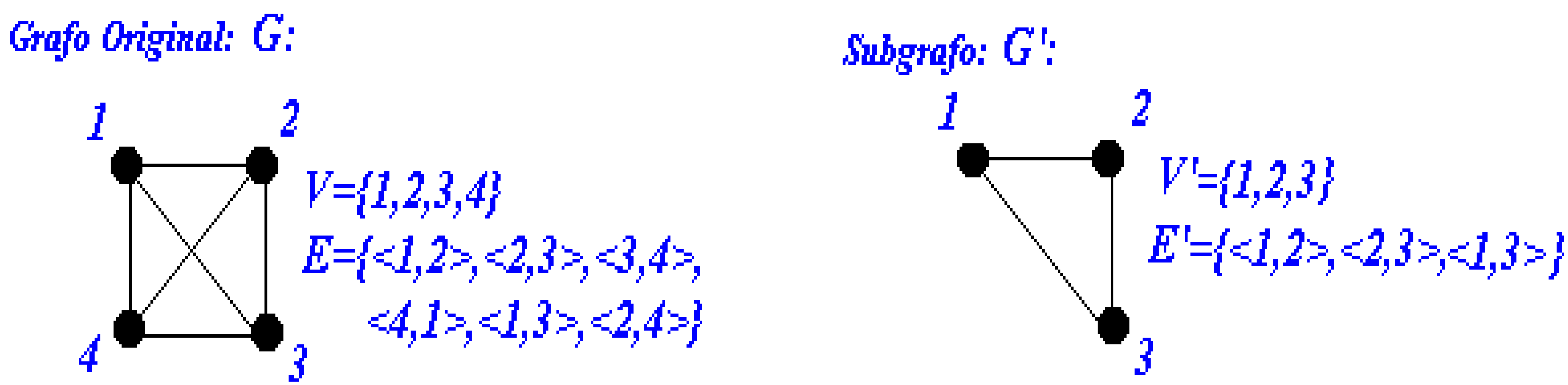


Figura 12. Ejemplo de un Grafo y un subgrafo

Subgrafo expandido. La figura 13 permite observar dos grafos no dirigidos, G es un grafo que posee 4 vértices y 6 aristas, en este caso es el grafo original; mientras G' es el subgrafo de G, pero en este caso es un subgrafo expandido. Como podemos observar G' cumple todas las condiciones de subgrafo, es decir, V' es subconjunto de V con la particularidad de que V' debe ser igual a V y E' es subconjunto de E.

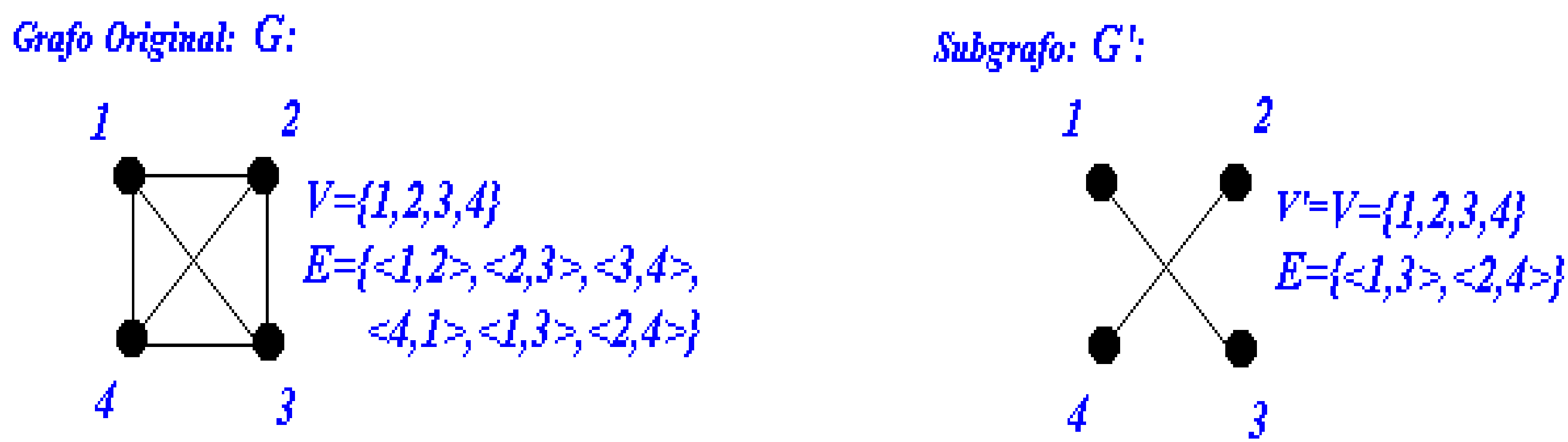


Figura 13. Ejemplo de un Grafo y un subgrafo expandido

Grafo completo. Un grafo completo tiene cada par de vértices unido por una arista. Se denota por **K_n** al grafo completo de **n** vértices.

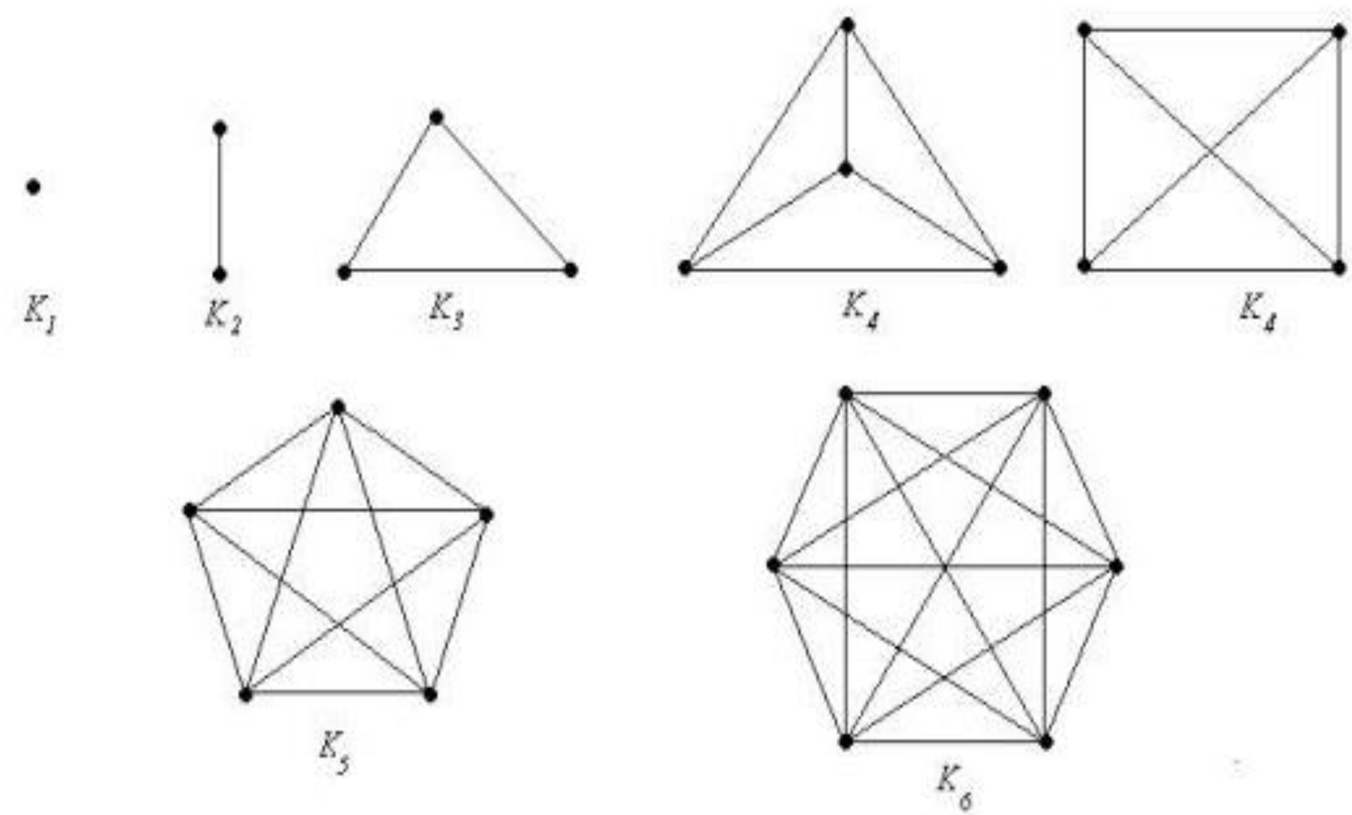


Figura 14. Ejemplo de grafos completos

Grafo complementario. El grafo complementario G' del grafo original G, está compuesto por todos los vértices de G y las aristas que no están en G.

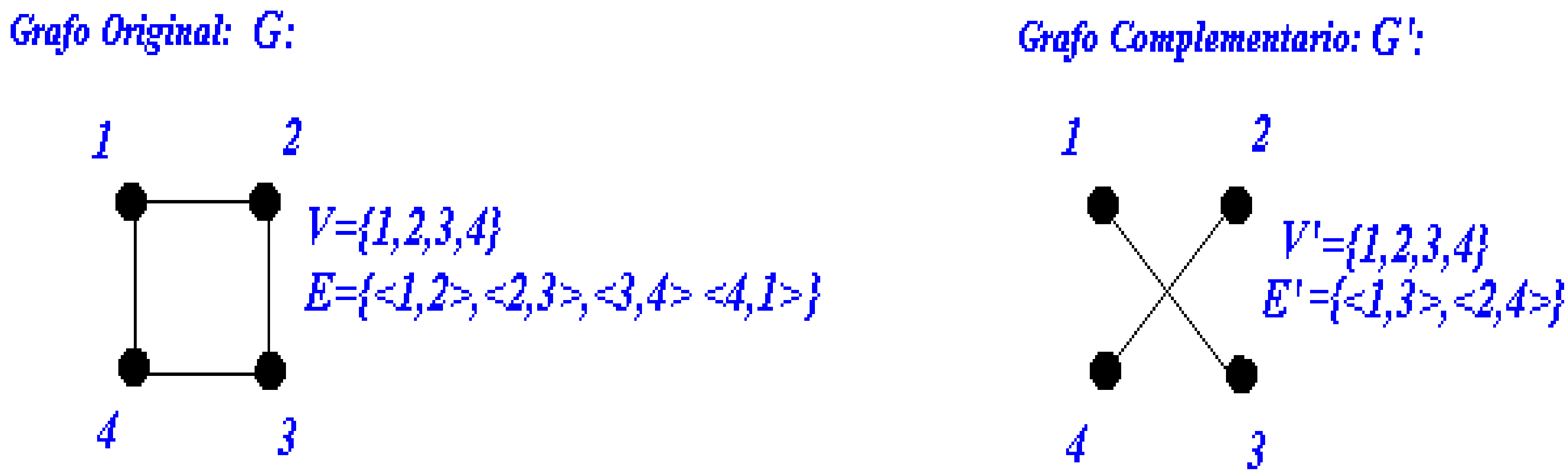


Figura 15. Ejemplo de grafo complementario

---------------------------- FIN DEL DOCUMENTO