PROGRAMA INGENIERÍA DE SISTEMAS

ANÁLISIS NUMÉRICO

Mag. Carlos Alberto Ardila Albarracín

En contexto…

La mayor parte de las matemáticas estudiadas hasta ahora se han dedicado a desarrollar métodos que nos proporcionen la solución exacta de un problema.

Por ejemplo, calcular la solución de una ecuación del tipo f(x)=0 realizando operaciones elementales sobre la misma para conseguir despejar la incógnita x.

O bien, calcular el valor de una integral definida $\int_a^b f(x)\,dx$

En contexto…

El asunto es que en la gran mayoría de los casos estos métodos no son de aplicación.

¿Por qué?

El método para calcular la solución exacta (analítica) sea muy complicado

o que incluso no exista un método que permita mediante cálculos elementales encontrar la solución

En contexto…

En estos casos es necesario recurrir a **métodos numéricos**,

los cuales son algoritmos que ejecutan operaciones numéricas

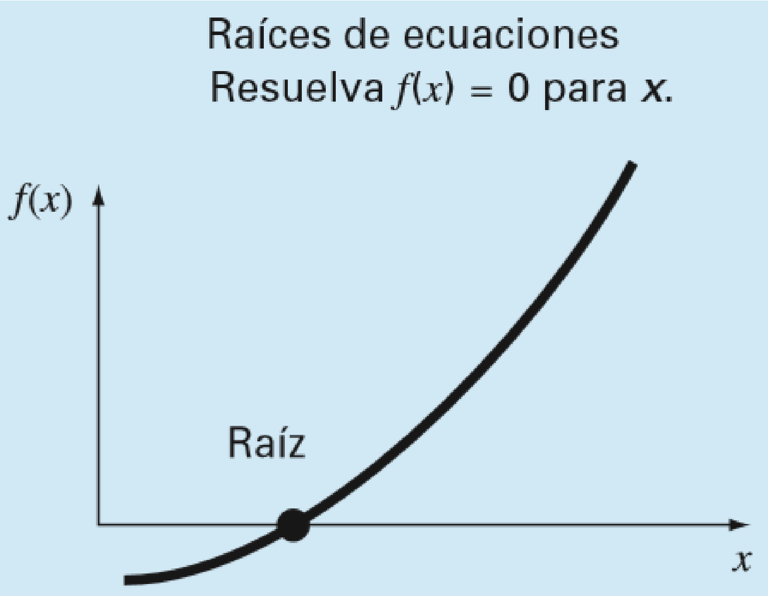
que al final (normalmente) entregan un valor numérico

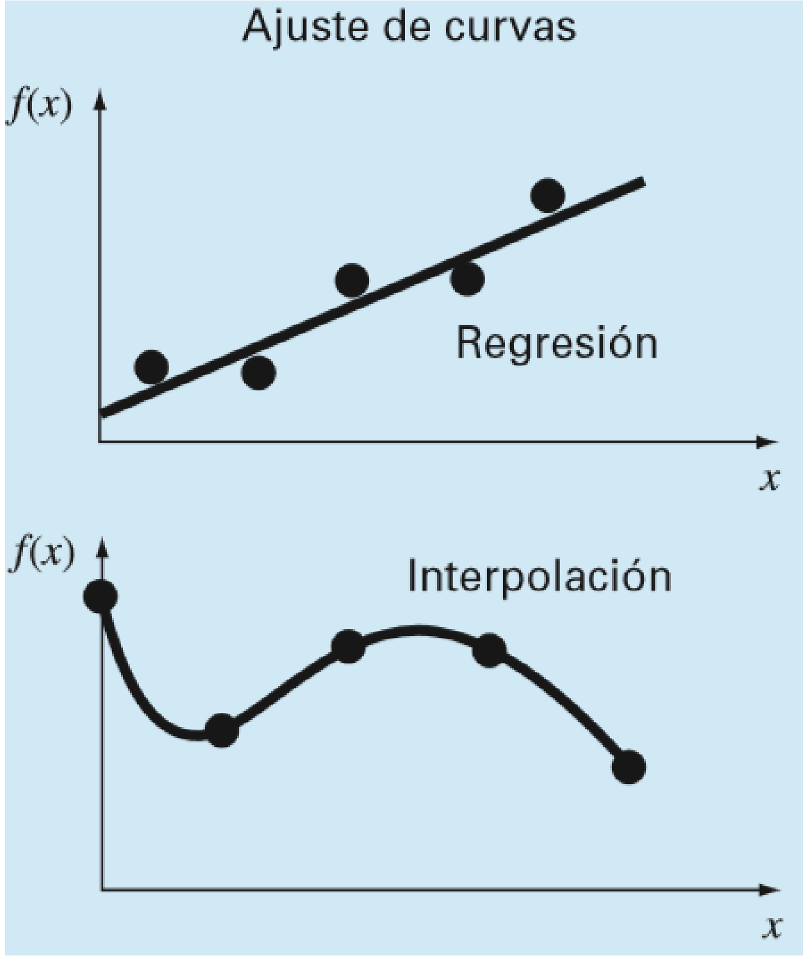
que, si bien no es la solución exacta del problema,

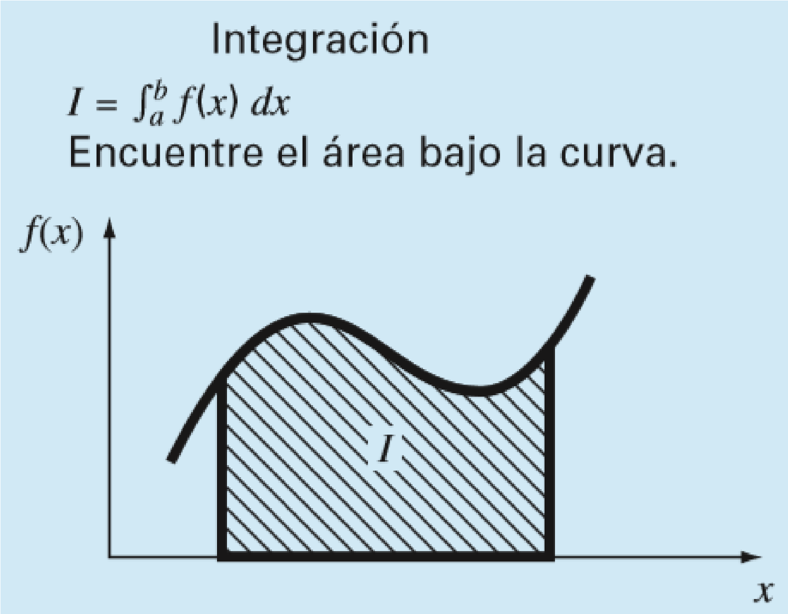
aproxima la solución buscada cuyo valor se considera aceptable

según parámetros definidos previamente

BLOQUES TEMÁTICOS







EVALUACIONES

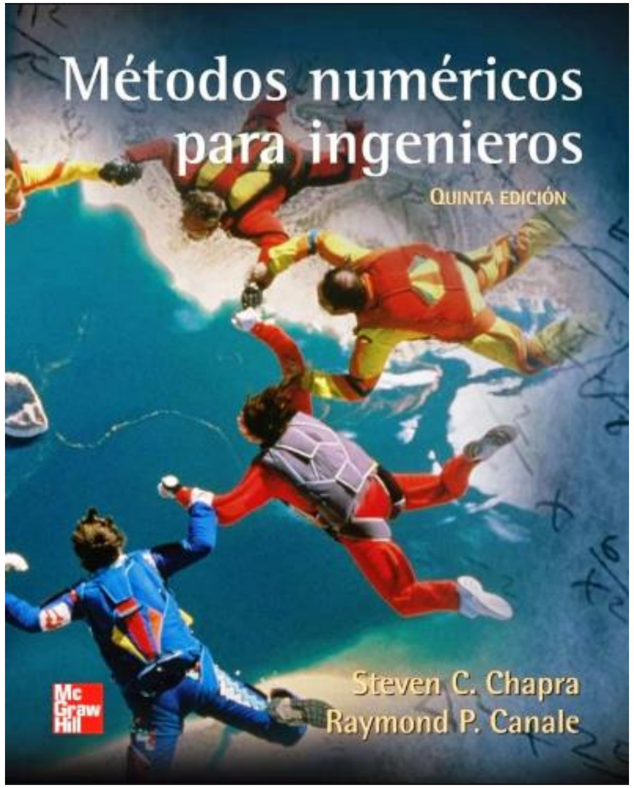
Parcial 1 (Raíces de Ecuaciones): 35%

Parcial 2 (Regresión e Interpolación): 35%

Final (Integración Numérica): 30%

Cada evaluación se asignará al finalizar un bloque temático y se otorgarán varios días para su solución y la elaboración del reporte correspondiente

MATERIAL DE APOYO



CHAPRA, Steven y CANALE, Raymond. MÉTODOS NUMÉRICOS PARA INGENIEROS. Quinta Edición. MCGraw-Hill. 2007.
ISBN-13: 978-970-10-6114-5
ISBN-10: 970-10-6114-4

PROGRAMA DE INGENIERIA DE SISTEMAS ANÁLISIS NUMÉRICO	PRESENTACIÓN DEL CURSO		
	BLOQUE TEMÁTICO 1	BLOQUE TEMÁTICO 2	BLOQUE TEMÁTICO 3

BLOQUE TEMÁTICO 1. RAÍCES DE ECUACIONES DE UNA VARIABLE

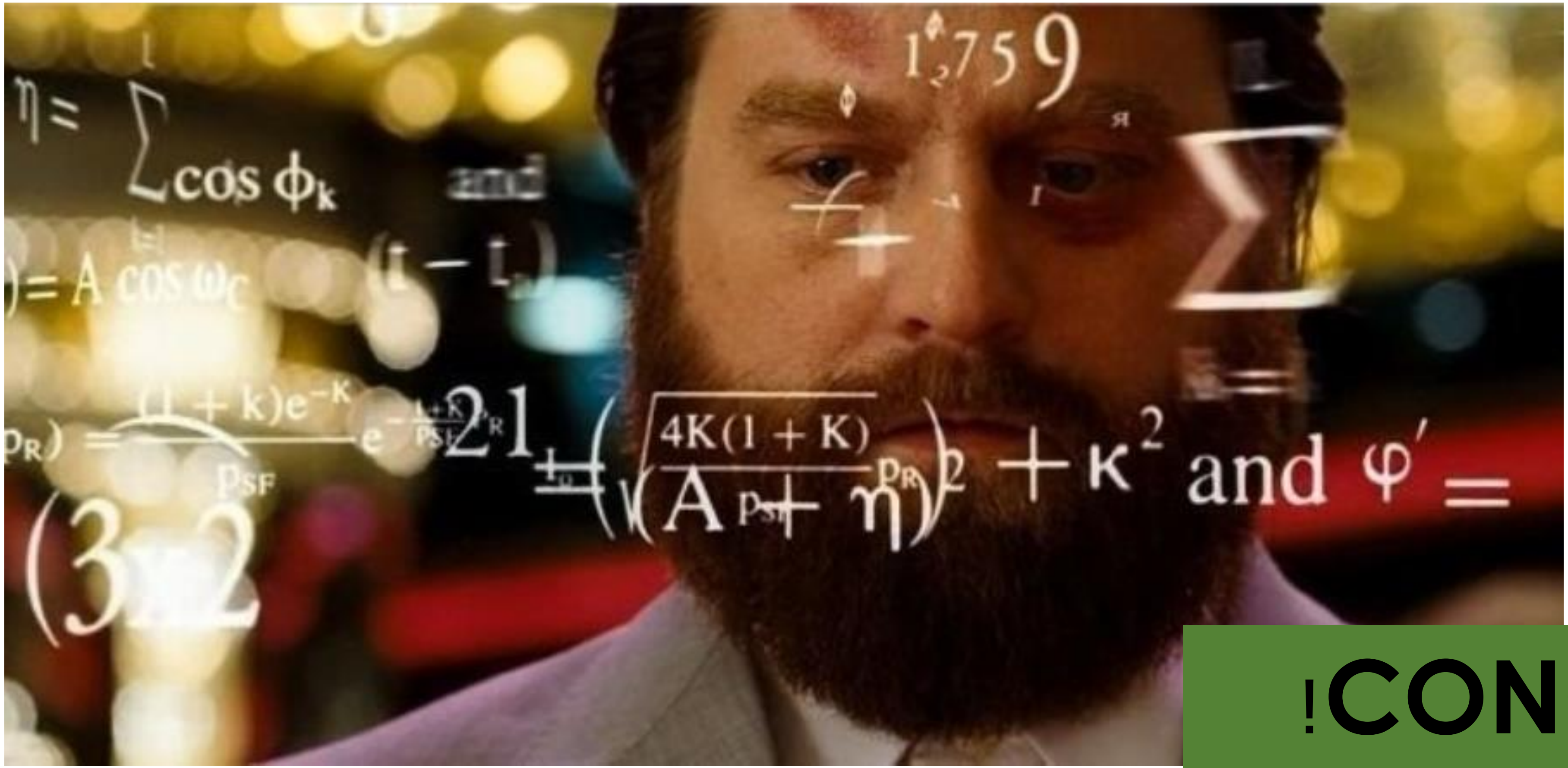
ITEM	SUBTEMA	SUBTEMAS Y LIBRO DE CHAPRA
1.0	AMBIENTACIÓN Sobre el Teorema del Valor Intermedio Evaluador de Intervalos (C++)	
1.1	MÉTODO DE BISECCIÓN Gráficas de apoyo (Excel) Método de Bisección (C++)	Capítulo 5: sección 5.2
1.2	MÉTODO DE REGLA FALSA Gráficas de apoyo (Excel) Método de Regla Falsa (C++)	Capítulo 5: sección 5.3
1.3	MÉTODO DE NEWTON-RAPHSON Gráficas de apoyo (Excel) Método de Newton – Raphson (C++)	Capítulo 6: sección 6.2
1.4	MÉTODO DE LA SECANTE Gráficas de apoyo (Excel) Método de la Secante (C++)	Capítulo 6: sección 6.3
1.5	RAÍCES MÚLTIPLES Ejemplos con Newton normal (C++) Ejemplos con Newton Generalizado (C++)	Capítulo 6: sección 6.4
1.6	MÉTODO DE MÜLLER Gráficas de apoyo (Excel) Método de Müller (C++)	Capítulo 7: sección 7.4
1.7	RECAPITULACIÓN	

EJEMPLO DE REPORTE DEL PRIMER PARCIAL

REGRESAR

Sitio Web

http://artemisa.unicauca.edu.co/~cardila/AN.htm



¡CONCEPTOS PARA EMPEZAR!

Representación de un número real en punto flotante

¿A qué se denomina “conjunto de punto flotante”?
Conjunto de números RACIONALES utilizado para representar a los números REALES.

- Complejos: **C**
  - **Reales: R**
    - **Racionales: Q**
      - Enteros: **Z**
        - Naturales
          - Uno: 1
          - Primos
          - Compuestos
        - **Cero: 0**
        - Enteros Negativos
      - Fraccionarios: **F**
        - Exacto
        - Periódico
          - Puro
          - Mixto
    - Irracionales
  - Imaginarios

¿A qué se denomina "conjunto de punto flotante"?

Y aquí se genera un primer problema:

Se necesita representar valores de un conjunto MÁS GRANDE (REALES)

con elementos de un conjunto MÁS PEQUEÑO (RACIONALES)

→

De modo que para representar un número REAL en computación,

se utiliza el número de punto flotante [NPF] el cual es el RACIONAL que mejor le aproxime,

y esto en la gran mayoría de casos genera una DIFERENCIA

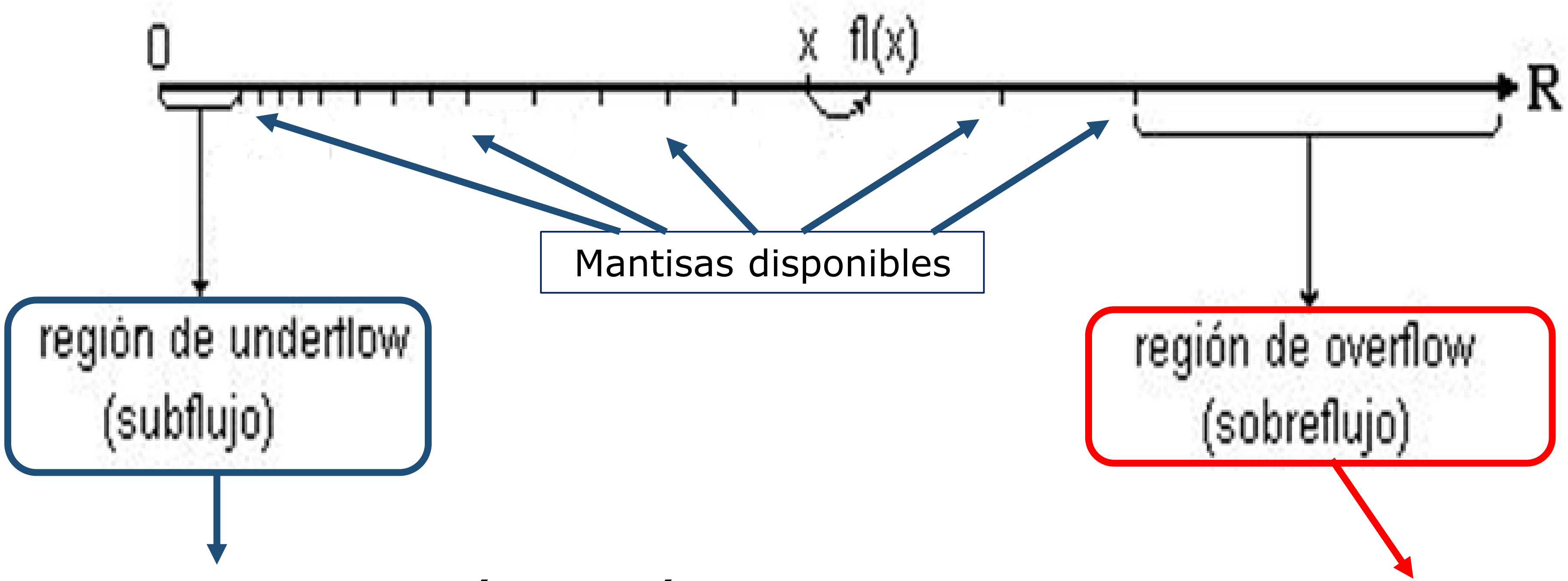
→

Y esa diferencia, da lugar al primer tipo de error:
EL ERROR DE REDONDEO
(o solamente ERROR)

E= | REAL – NPF |

¿Y cuáles son las propiedades de un "conjunto de punto flotante"?

Vemos que los valores no están igualmente espaciados (están más densamente ubicados en la cercanía del cero)



Ubicada entre el cero y el número más pequeño del conjunto de punto flotante, y en algunos computadores si un número real cae en esta región, el número SE REDONDEA A CERO.

Ubicada más allá del número más grande del conjunto de punto flotante, y en algunos computadores si un número real cae en esta región, normalmente se informa del fenómeno overflow.

ARITMÉTICA de Punto Flotante

Si **x** e **y** son números reales
en el rango de F ,
definimos las operaciones

$\oplus$, $\ominus$, $\otimes$ y $\oslash$

a las que nos referiremos como
operaciones de punto flotante, así:

$$x \oplus y = \mathbf{fl}(\, fl(x) + fl(y)\,)$$
$$x \ominus y = \mathbf{fl}(\, fl(x) - fl(y)\,)$$
$$x \otimes y = \mathbf{fl}(\, fl(x) * fl(y)\,)$$
$$x \oslash y = \mathbf{fl}(\, fl(x) \div fl(y)\,)$$

donde $+$, $-$, $*$ y $\div$
son las operaciones aritméticas usuales.

OJO que aquí se requiere:

La representación en flotante del real x: fl(x)

La representación en flotante del real y: fl(y)

La representación en flotante del real resultante de la operación.

Si fuese la suma:

$$x \oplus y = \mathbf{fl}(\, \mathbf{fl(x)} + \mathbf{fl(y)}\,)$$

ARITMÉTICA de Punto Flotante

OJO: La combinación aritmética usual $+, -, \times, \div$
de dos números de punto flotante
NO SIEMPRE produce un número de punto flotante.

Suma de DOS flotantes NO SIEMPRE genera un número de punto flotante
(¿Si sumamos 2 valores muy grandes –cercanos a la región de overflow-?)

Producto de DOS flotantes NO SIEMPRE genera un número de punto flotante
(¿Si multiplicamos 2 valores muy grandes –cercanos a la región de overflow-?)

Resta de DOS flotantes NO SIEMPRE genera un número de punto flotante
(¿Si restamos 2 valores muy cercanos entre sí?)

División de DOS flotantes NO SIEMPRE genera un número de punto flotante
(¿Si dividimos 1 valor muy pequeño entre uno muy grande?)

Concepto de Error

Hay varias formas acostumbradas para medir errores de aproximación. ¿Cómo se definen el "error", el "error absoluto", el "error relativo" y el "error porcentual"?

Sea x^* una aproximación de un número real x:

El error de x^* con respecto a x es $\mathbf{e = x - x^*}$; (también denominado error de redondeo)

El error absoluto de x^* con respecto a x es $\mathbf{E = |x - x^*|}$;

El error relativo de x^* con respecto a x, con $x \neq 0$

$$\mathbf{Er = \frac{|x - x^*|}{|x|}}$$

Error porcentual de x^* con respecto a x: $\mathbf{Ep = (Er * 100)\%}$ y se expresa en porcentaje (%)

Concepto de Error

Ejemplo.
Encuentre el error absoluto y el error relativo de **x* (el flotante)** con respecto a **x (el real)**, en cada uno de los siguientes casos:

a) $x = (.50)*10^2$, $x^* = (.51)*10^2$

$$E = |x - fl(x)| = |\,(.50)*10^2 - (.51)*10^2\,| = |\,-(.01)*10^2\,| = (.1)*10^1 = 1.0$$

¿Y qué? ¿1.0 con respecto a qué?

$$Er = \frac{|\,x - fl(x)\,|}{|\,x\,|} = \frac{1.0}{(.50)*10^2} = \frac{1}{50} = .2*10^{-1} = .02 = 2\%$$

¡Esto SÍ da una idea!

b) $x = (.50)*10^{-3}$, $x^* = (.51)*10^{-3}$

$$E = |x - fl(x)| = |\,(.50)*10^{-3} - (.51)*10^{-3}\,| = |\,-(.01)*10^{-3}\,| = (.1)*10^{-4} = .00001$$

¿Y qué? ¿.00001 con respecto a qué?

$$Er = \frac{|\,x - fl(x)\,|}{|\,x\,|} = \frac{(.1)*10^{-4}}{(.5)*10^{-3}} = \frac{(.1)*10^{-1}}{.5} = \frac{1}{50} = .2*10^{-1} = .02 = 2\%$$

¡Esto SÍ da una idea!

Concepto de Error

Ejemplo 2.
Encuentre el error absoluto y el error relativo de **x* (el flotante)** con respecto a **x (el real)**, en cada uno de los siguientes casos:

c) $x= (.50)*10^6$, $x^*=(.51)*10^6$

$$E= |x-fl(x)| = |(.50)*10^6 - (.51)*10^6| = |-(.01)*10^6| = (.1)*10^5 = 10000$$

¿Y qué? ¿10000 con respecto a qué?

$$Er = \frac{|x-fl(x)|}{|x|} = \frac{(.1)*10^5}{(.5)*10^6} = \frac{(.1)}{(.5)*10^1} = \frac{1}{50} = .2*10^{-1} = .02 = 2\%$$

¡Esto SÍ da una idea!

Este ejemplo nos muestra que el error relativo es invariante al cambio de escala y se usa como una medida de precisión o cercanía.

Cifras significativas

Ojo con lo siguiente:

Además de los inevitables errores de redondeo,

en un proceso numérico se producen otro tipo de errores que una cuidadosa programación puede controlar

Es el llamado

ERROR

GENERADO

Un ejemplo típico es la pérdida de cifras significativas que se produce al restar dos cantidades muy próximas.

Cifras significativas

EJEMPLO 3. Supongamos que estamos trabajando con una máquina decimal con mantisa de cinco dígitos y que se usa REDONDEO, que tenemos x = **22.375**686, y=**22.373**897. Deseamos calcular x-y. La máquina utilizará:

x-y = 0.001789 **fl(x)** $=0.22376 * 10^2$ **fl(y)** $= 0.22374 * 10^2$

y proporcionará fl(x)-fl(y) $= 0.00002 * 10^2 = 0.20000 * 10^{-2}$

Si medimos el error relativo producido por la operación

$$\frac{|(x-y) - [fl(x)-fl(y)]|}{|x-y|} = \frac{|0.001789-0.002|}{0.001789} \approx 11.79\%$$

Se ve que resulta muy grande.

¡PERDEMOS ESTAS CIFRAS! Y los flotantes quedan muy similares

Cifras significativas

La pregunta es:

¿Qué alternativas hay para reducir la pérdida de cifras significativas?

(a) Aumentar la precisión

(b) Re-escribir las expresiones

(c) Evitar sumas y restas alternadas (como en algunas series de Taylor)

¿Bajo cuál circunstancia se considera que un algoritmo es estable o es inestable?

Algoritmo estable

cuando el efecto acumulativo de los errores, incluyendo errores de redondeo, es limitado de modo que se genera un resultado útil.

Algoritmo inestable

cuando los errores crecen de manera incontrolada de modo que se genera una respuesta defectuosa al problema.

Cifras significativas

¿Bajo cuál circunstancia se considera que un problema es bien condicionado?

Un problema se dice bien condicionado si pequeños cambios en los datos inducen sólo un cambio pequeño en el resultado, es decir, problemas "cercanos" tienen respuesta "cercana".

El buen condicionamiento es algo inherente al problema, o sea, que nada podemos hacer para cambiar su naturaleza.

Una buena práctica para toda situación es evitar redondeos exagerados.

EJEMPLO 4. Consideremos el siguiente sistema de ecuaciones lineales:

$$\mathbf{X} + \mathbf{Y} = 2$$
$$10.05\,\mathbf{X} + 10\,\mathbf{Y} = 21$$

La solución exacta (única) de este sistema es **x = 20** e **y = −18**.

En este caso, el punto (20,−18) es la intersección de las rectas casi paralelas:

L1: $\mathbf{X} + \mathbf{Y} = 2$, con pendiente m1 = −1.0

L2: $10.05\,\mathbf{X} + 10\,\mathbf{Y} = 21$, con pendiente m2 = −1.005

Ahora cambiamos el coeficiente 10.05 por 10.1
(un cambio relativo de aproximadamente 0.5%), y consideramos el sistema perturbado

$$\mathbf{X} + \mathbf{Y} = 2$$
$$10.1\,\mathbf{X} + 10\,\mathbf{Y} = 21$$

La solución exacta de este sistema perturbado es x = 10, y = −8.

Se observa que un cambio pequeño en uno de los datos del problema produjo un gran cambio en la solución.
Este problema se dice que está mal condicionado.

¿ P R E G U N T A S ?

----- FIN DEL DOCUMENTO