ANÁLISIS NUMÉRICO

Mag. Carlos Alberto Ardila Albarracín

BLOQUE 3. INTEGRACIÓN NUMÉRICA

3.7. MÉTODO DE ROMBERG

MÉTODO DE ROMBERG

La integración de Romberg es una técnica diseñada para obtener integrales numéricas de funciones de manera eficiente

Se basa en la técnica de:

combinar dos estimaciones con la regla del **trapecio** cuyo error de estimación es $O(h^2)$ para obtener una nueva estimación de $O(h^4)$ [es decir, con menor error]

Posteriormente,

combinar dos estimaciones con la regla del **trapecio** con error de estimación $O(h^4)$ para obtener una nueva estimación de $O(h^6)$ [es decir, con menor error]

MÉTODO DE ROMBERG

La integración de Romberg es una técnica diseñada para obtener integrales numéricas de funciones de manera eficiente

Posteriormente,

combinar dos estimaciones con la regla del **trapecio** con error de estimación $O(h^6)$ para obtener una nueva estimación de $O(h^8)$ [es decir, con menor error]

Hasta (aunque se podría seguir)…

combinar dos estimaciones con la regla del **trapecio** con error de estimación $O(h^8)$ para obtener una nueva estimación de $O(h^{10})$ [es decir, con menor error]

MÉTODO DE ROMBERG

Se comienza con:

combinar dos estimaciones con la regla del trapecio cuyo error de estimación es O(h^2)

Para que veamos la efectividad del método, se usarán estimaciones con regla del Trapecio con 1, 2, 4, 8, y 16 segmentos (es decir k = 5 aproximaciones) para estimar:

$$\int_0^{\pi/3} sen^2(x)dx$$

	K=1 O(h^2)
	I(1,1)
1 Segmento	0,39269908
	I(2,1)
2 Segmentos	0,32724923
	I(3,1)
4 Segmentos	0,31206154
	I(4,1)
8 Segmentos	0,30833043
	I(5,1)
16 Segmentos	0,30740166

Los valores de esta columna se obtienen usando regla del TRAPECIO

MÉTODO DE ROMBERG

Ahora se continúa de la siguiente manera:

combinar dos estimaciones con la regla del **trapecio** cuyo error de estimación es $O(h^2)$ para obtener una nueva estimación de $O(h^4)$ [es decir, con menor error]

	K=1 O(h^2)	K=2 O(h^4)
	I(1,1)	I(1,2)
1 Segmento	0,39269908	0,30543262
	I(2,1)	I(2,2)
2 Segmentos	0,32724923	0,30699898
	I(3,1)	I(3,2)
4 Segmentos	0,31206154	0,30708673
	I(4,1)	I(4,2)
8 Segmentos	0,30833043	0,30709207
	I(5,1)	
16 Segmentos	0,30740166	

Los valores de esta columna se obtienen usando regla del TRAPECIO

Se calcula así:
I(1,2) =(4/3)I(2,1) - (1/3)I(1,1)

Se calcula así:
I(2,2) =(4/3)I(3,1) - (1/3)I(2,1)

Se calcula así:
I(3,2) =(4/3)I(4,1) - (1/3)I(3,1)

Se calcula así:
I(4,2) =(4/3)I(5,1) - (1/3)I(4,1)

Noten que vamos llenando parte de una matriz (K × K):
Columna 1: Aproximaciones del método del Trapecio
Columna 2: Aproximaciones con las fórmulas Romberg $O(h^4)$

MÉTODO DE ROMBERG

Posteriormente,
combinar dos estimaciones con la regla del **trapecio** con error de estimación $O(h^4)$ para obtener una nueva estimación de $O(h^6)$ [es decir, con menor error]

	K=1 O(h^2)	K=2 O(h^4)	K=3 O(h^6)
1 Segmento	I(1,1) 0,39269908	I(1,2) 0,30543262	I(1,3) 0,30710341
2 Segmentos	I(2,1) 0,32724923	I(2,2) 0,30699898	I(2,3) 0,30709258
4 Segmentos	I(3,1) 0,31206154	I(3,2) 0,30708673	I(3,3) 0,30709243
8 Segmentos	I(4,1) 0,30833043	I(4,2) 0,30709207	
16 Segmentos	I(5,1) 0,30740166		

Se calcula así:
I(1,3) =(16/15)I(2,2) - (1/15)I(1,2)

Se calcula así:
I(2,3) =(16/15)I(3,2) - (1/15)I(2,2)

Se calcula así:
I(2,3) =(16/15)I(4,2) - (1/15)I(3,2)

Noten que seguimos llenando parte de una matriz (K × K):
Columna 1: Aproximaciones del método del Trapecio
Columna 2: Aproximaciones con las fórmulas Romberg $O(h^4)$
Columna 3: Aproximaciones con las fórmulas Romberg $O(h^6)$

MÉTODO DE ROMBERG

Posteriormente,

combinar dos estimaciones con la regla del **trapecio** con error de estimación $O(h^6)$ para obtener una nueva estimación de $O(h^8)$ [es decir, con menor error]

K=1 O(h^2)	K=2 O(h^4)	K=3 O(h^6)	K=4 O(h^8)
I(1,1) 0,39269908	I(1,2) 0,30543262	I(1,3) 0,30710341	I(1,4) 0,30709241
I(2,1) 0,32724923	I(2,2) 0,30699898	I(2,3) 0,30709258	I(2,4) 0,30709242
I(3,1) 0,31206154	I(3,2) 0,30708673	I(3,3) 0,30709243	
I(4,1) 0,30833043	I(4,2) 0,30709207		
I(5,1) 0,30740166			

Se calcula así:
I(1,4) =(64/63)I(2,3) - (1/63)I(1,3)

Se calcula así:
I(2,4) =(64/63)I(3,3) - (1/63)I(2,3)

Noten que seguimos llenando parte de una matriz (K × K):

Columna 4: Aproximaciones con las fórmulas Romberg O(h^{8}**)**

MÉTODO DE ROMBERG

Hasta (aunque se podría seguir)…

combinar dos estimaciones con la regla del **trapecio** con error de estimación $O(h^8)$ para obtener una nueva estimación de $O(h^{10})$ [es decir, con menor error]

K=1 O(h^2)	K=2 O(h^4)	K=3 O(h^6)	K=4 O(h^8)	K=5 O(h^10)
I(1,1) 0,39269908	I(1,2) 0,30543262	I(1,3) 0,30710341	I(1,4) 0,30709241	I(1,5) 0,30709242
I(2,1) 0,32724923	I(2,2) 0,30699898	I(2,3) 0,30709258	I(2,4) 0,30709242	
I(3,1) 0,31206154	I(3,2) 0,30708673	I(3,3) 0,30709243		
I(4,1) 0,30833043	I(4,2) 0,30709207			
I(5,1) 0,30740166				

Se calcula así:
I(1,5) =(256/255)I(2,4) - (1/255)I(1,4)

Terminamos de llenar parte de una matriz (K × K):

Columna 5: Aproximación con fórmula Romberg $O(h^{10})$

MÉTODO DE ROMBERG

Calculamos el error…

$$Ea = \left| \frac{I(1,k) - I(1,k-1)}{I(1,k)} \right| * 100\%$$

Para el ejemplo que venimos tratando:

$$Ea = \left| \frac{I(1,5) - I(1,4)}{I(1,5)} \right| * 100\% = \left| \frac{0.30709242 - 0.30709241}{0.30709242} \right| * 100\% = 6.1493 * 10^{-6}\%$$

Logrado usando solamente un total de 31 segmentos
a partir de las 5 aproximaciones con el Método del Trapecio

---------- FIN DEL DOCUMENTO