ANÁLISIS NUMÉRICO

Mag. Carlos Alberto Ardila Albarracín

BLOQUE 3. INTEGRACIÓN NUMÉRICA

3.6. FÓRMULAS NEWTON-COTES: ESTIMACIÓN DE ERROR EN FUNCIONES POLINÓMICAS

La regla de Simpson (1/3) es exacta cuando se aplica a polinomios de grado menor o igual a 3.

$$Error(Simpson(1/3)) = -h^4 \frac{b-a}{180} f^{(4)}(\varepsilon)$$ ***Donde*** (ε) ***pertenece al intervalo [a , b]***

Ejemplo 1. Primero la resolvemos analíticamente (a modo de referencia):

$$\int_0^5 1 - x - 4x^3\,dx = x - \frac{x^2}{2} - \frac{4x^4}{4}\Bigg]_0^5 \qquad \int_0^5 1 - x - 4x^3\,dx = \left[5 - \frac{5^2}{2} - \frac{4(5)^4}{4}\right] - [0] = \left[5 - \frac{25}{2} - 625\right] = -632.5$$

Aproximación con el método de Simpson (1/3):

Integral de f(x) = 1 - x - 4x^3

a 0,0 Número de franjas PAR

b 5,0

n 8

$$\Delta X = \frac{b - a}{n} = \frac{5{,}0 - 0{,}0}{8} = \mathbf{0{,}625}$$

Xo	0,000	1,0000	F(Xo)	Yo
X1	0,625	-0,6016	F(X1)	Y1
X2	1,250	-8,0625	F(X2)	Y2
X3	1,875	-27,2422	F(X3)	Y3
X4	2,500	-64,0000	F(X4)	Y4
X5	3,125	-124,1953	F(X5)	Y5
X6	3,750	-213,6875	F(X6)	Y6
X7	4,375	-338,3359	F(X6)	Y7
X8	5,000	-504,0000	F(X6)	Y8

I = 0,63 / 3 [Yo + 4 (Y1 + Y3 + Y5 + Y7) + 2 (Y2 + Y4 + Y6) + Y8]

I = 0,63 / 3 [1,0000 + 4 (-0,6016 + -27,2422 + -124,1953 + -338,3359) + 2 (-8,0625 + -64,0000 + -213,6875) + -504,0000]

I = 0,63 / 3 [1,0000 + 4 (-490,3750) + 2 (-285,7500) + -504,0000]

I = 0,63 / 3 [1,0000 + -1961,5000 + -571,5000 + -504,0000]

I = 0,63 / 3 [-3036,0000]

I = 0,2083 [-3036,0000]

I = **-632,5000**

Para la fórmula del error debe determinarse el valor de $f^{(4)}$:

$$f(x) = 1 - x - 4x^3 \qquad f'(x) = -1 - 12x^2 \qquad f''(x) = -24x \qquad f^{(3)}(x) = -24 \qquad f^{(4)}(x) = 0$$

Por consiguiente, al reemplazar en la expresión de error esta dará CERO.

***Ejemplo 2.* Primero la resolvemos analíticamente (a modo de referencia):**

$$\int_0^{10}(10+2x-6x^2+5x^4)\,dx = 10x + x^2 - \frac{6x^3}{3} + x^5 \Bigg]_0^{10}$$

$$\int_0^{10}(10+2x-6x^2+5x^4)\,dx = \left[10(10)+x^2-2(10)^3+(10)^5\right]-[0]$$

$$\int_0^{10}(10+2x-6x^2+5x^4)\,dx = [100+100-2000+100000] = 98200$$

Aproximación con el método de Simpson (1/3):

Integral de f(x) = 10 + 2x -6x^2 + 5x^4

a 0,0 — Número de franjas PAR

b 10,0

n 8

$$\Delta X = \frac{b - a}{n} = \frac{10{,}0 - 0{,}0}{8} = \mathbf{1{,}25}$$

Xo	0,000	10,0000	F(Xo)	Yo
X1	1,250	15,3320	F(X1)	Y1
X2	2,500	172,8125	F(X2)	Y2
X3	3,750	921,8945	F(X3)	Y3
X4	5,000	2995,0000	F(X4)	Y4
X5	6,250	7417,5195	F(X5)	Y5
X6	7,500	15507,8125	F(X6)	Y6
X7	8,750	28877,2070	F(X6)	Y7
X8	10,000	49430,0000	F(X6)	Y8

I = 1,25 / 3 [Yo + 4 (Y1 + Y3 + Y5 + Y7) + 2 (Y2 + Y4 + Y6) + Y8]

I = 1,25 / 3 [10,0000 + 4 (15,3320 + 921,8945 + 7417,5195 + 28877,2070) + 2 (172,8125 + 2995,0000 + 15507,8125) + 49430,0000]

I = 1,25 / 3 [10,0000 + 4 (37231,9531) + 2 (18675,6250) + 49430,0000]

I = 1,25 / 3 [10,0000 + 148927,8125 + 37351,2500 + 49430,0000]

I = 1,25 / 3 [235719,0625]

I = 0,4167 [235719,0625]

I = **98216,2760**

Para la fórmula del error debe determinarse el valor de $f^{(4)}$:

$$f(x) = 10 + 2x - 6x^2 + 5x^4 \qquad f'(x) = 2 - 12x + 20x^3$$

$$f''(x) = -12 + 60x^2 \qquad f^{(3)}(x) = 120x \qquad f^{(4)}(x) = 120 = f^{(4)}(\varepsilon)$$

El error es (si usamos 8 franjas, el paso h vale 1.25)

$$E_T = -(1.25)^4 \frac{10-0}{180}(120) = -(1.25)^4 * 6.666666 = -(2.44140625)(6.666666) = -16.276$$

Ajustamos la integral:

Integral ajustada = Aproximación + E_T

Integral ajustada = 98216.276 + (-16.276)

Integral ajustada = 98200

***Ejemplo 3*. Primero la resolvemos analíticamente (a modo de referencia):**

$$\int_0^5 (1 - x - 4x^3 + 3x^5)\,dx = x - \frac{x^2}{2} - x^4 + \frac{3x^6}{6}\Bigg]_0^5$$

$$\int_0^5 (1 - x - 4x^3 + 3x^5)\;dx = \left[5 - \frac{5^2}{2} - 5^4 + \frac{3(5)^6}{6}\right] - [0]$$

$$\int_0^5 (1 - x - 4x^3 + 3x^5)\;dx = \left[5 - \frac{25}{2} - 625 + \frac{15625}{2}\right] = [5 - 12.5 - 625 + 7812.5] = 7180$$

Aproximación con el método de Simpson (1/3):

Integral de f(x) = 1 - x - 4x^3 + 3x^5

a	0,0
b	5,0
n	8

Número de franjas PAR

$$\Delta X = \frac{b - a}{n} = \frac{5{,}0 - 0{,}0}{8} = \mathbf{0{,}625}$$

Xo	0,000	1,0000	F(Xo)	Yo
X1	0,625	-0,3155	F(X1)	Y1
X2	1,250	1,0928	F(X2)	Y2
X3	1,875	42,2807	F(X3)	Y3
X4	2,500	228,9688	F(X4)	Y4
X5	3,125	769,8744	F(X5)	Y5
X6	3,750	2011,0439	F(X6)	Y6
X7	4,375	4470,1853	F(X6)	Y7
X8	5,000	8871,0000	F(X6)	Y8

I = 0,63 / 3 [Yo + 4 (Y1 + Y3 + Y5 + Y7) + 2 (Y2 + Y4 + Y6) + Y8]

I = 0,63 / 3 [1,0000 + 4 (-0,3155 + 42,2807 + 769,8744 + 4470,1853) + 2 (1,0928 + 228,9688 + 2011,0439) + 8871,0000]

I = 0,63 / 3 [1,0000 + 4 (5282,0249) + 2 (2241,1055) + 8871,0000]

I = 0,63 / 3 [1,0000 + 21128,0996 + 4482,2109 + 8871,0000]

I = 0,63 / 3 [34482,3105]

I = 0,2083 [34482,3105]

I = **7183,8147**

Para la fórmula del error debe determinarse el valor de $f^{(4)}$:

$$f(x) = 1 - x - 4x^3 + 3x^5 \qquad f'(x) = -1 - 12x^2 + 15x^4$$

$$f''(x) = -24x + 60x^3 \qquad f^{(3)}(x) = -24 + 180x^2 \qquad f^{(4)}(x) = 360x = f^{(4)}(\varepsilon)$$

Ahora, el punto (ε) en el que debemos evaluar a $f^{(4)}$ ES EL PUNTO MEDIO DEL INTERVALO en que se evalúa la integral.
Entonces: $f^{(4)}$ (2.5)=360*2.5=900

El error es (si usamos 8 franjas, el paso h vale 0.625)

$$E_T = -(0.625)^4 \frac{5}{180}(900) = -(0.625)^4 * 25 = -(0.152588) * 25 = -3.8147$$

Ajustamos la integral:

Integral ajustada = Aproximación + E_T

Integral ajustada = 7183.8147 + (-3.8147)

Integral ajustada = 7180

Ejemplo 4. **Ahora, revisemos la integral que hemos usado para los ejemplos iniciales:**

$$\int_0^{0.8} (0.2 + 25x - 200x^2 + 675x^3 - 900x^4 + 400x^5)\, dx = 1.64053333$$

Calculemos el error de aproximación que obtuvimos con Simpson (1/3) usando 8 segmentos.
La aproximación obtenida fue: 1.63946667

Para la fórmula del error debe determinarse el valor de $f^{(4)}$:

$$f(x) = 0.2 + 25x - 200x^2 + 675x^3 - 900x^4 + 400x^5 \qquad f'(x) = 25 - 400x + 2025x^2 - 3600x^3 + 2000x^4$$

$$f''(x) = -400 + 4050x - 10800x^2 + 8000x^3 \qquad f^{(3)}(x) = 4050 - 21600x + 24000x^2 \qquad f^{(4)}(x) = -21600 + 48000x$$

Dado que es un polinomio de grado 5, el valor de (ε) **a tomar es el punto medio del intervalo [0 , 0.8] :**

$$f^{(4)}(\varepsilon) = -21600 + 48000(0.4) = -21600 + 19200 = -2400$$

El error es (como usamos 8 franjas, el paso h vale 0.1)

$$E_T = -(0.1)^4 \frac{0.8}{180}(-2400) = -(0.0001)(-10.6666) = 0.00106666$$

Ajustamos la integral:

Integral ajustada = Aproximación + E_T
Integral ajustada = 1.63946667 + 0.00106666
Integral ajustada = 1.64053333

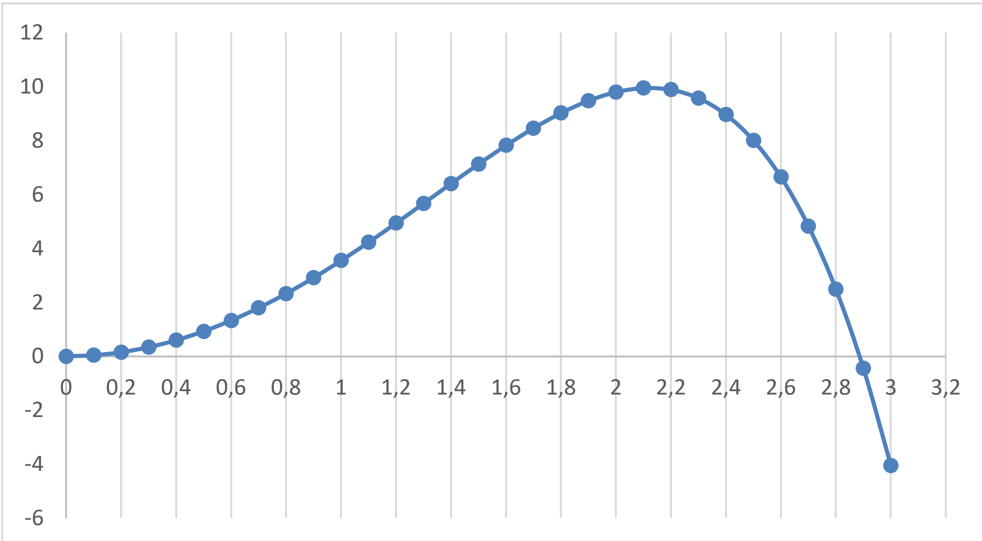
Cuando tengamos polinomios de mayor grado, podemos usar la fórmula de Chevilliet:

$$E = -\frac{h^4}{180}\left[f^{(3)}(b) - f^{(3)}(a) \right]$$

Ejemplo 5. Calcule el área formada por el eje X y la función: $f(x) = -0.15x^5 - 0.05x^3 + 3.75x^2$

Solución:

Como siempre, se sugiere graficar:



El cálculo del área conformada por el eje X y el polinomio mencionado, equivale a efectuar la integral definida:

$$\int_a^b -0.15x^5 - 0.05x^3 + 3.75x^2 dx$$

Pero, ¿cuánto valen a y b? debemos encontrar las raíces de esa función.

Es evidente que una raíz es x=0. Para la otra debemos usar algún método para calcular esa otra raíz que como puede verse, se ubica en el intervalo [2.8 , 3].

Usando el método de bisección, la raíz que buscamos es x = 2.88601

Entonces la integral nos queda: $$\int_0^{2,88601} -0.15x^5 - 0.05x^3 + 3.75x^2 dx$$

Solo como apoyo didáctico, resolvemos la integral de manera analítica:

$$\int_{0}^{2,88601} -0.15x^5 - 0.05x^3 + 3.75x^2 dx = -0.025x^6 - 0.0125x^4 + 1.25x^3 \Big]_{0}^{2,88601}$$

$$\int_{0}^{2,88601} -0.15x^5 - 0.05x^3 + 3.75x^2 dx = \quad [-0.025(2.88601)^6 - 0.0125(2.88601)^4 + 1.25(2.88601)^3] - [0] = 14,73468682$$

Aproximación con el método de Simpson (1/3) usando 16 segmentos (para que veamos los efectos de usar pocos segmentos):

```
double mapeo_funcion(double X)
{
 double valor = 0.0;
 valor = (-0.15)*pow(X,5) +  (-0.05)*pow(X,3) +  (3.75)*pow(X,2);
 return valor;
}
```

Get URL

options | compilation | execution

```
M E T O D O   S I M P S O N  ( 1 / 3 )

Limite Inferior (a) : 0
Limite Superior (b) : 2.88601

Limites leidos. a = 0 , b = 2.88601
Cantidad de segmentos: 16
Suma de las Y = 245.0593752
Integral = 14.73424599
```

Para la fórmula del error debe determinarse el valor de $f^{(4)}$:

$f(x) = -0.15x^5 - 0.05x^3 + 3.75x^2$		$f'(x) = -0.75x^4 - 0.15x^2 + 7.5x$
$f^{(2)}(x) = -3x^3 - 0.3x + 7.5$	$f^{(3)}(x) = -9x^2 - 0.3$	$f^{(4)}(x) = -18x = f^{(4)}(\varepsilon)$

Ahora, dado que es un POLINOMIO DE GRADO 5, el punto (ε) en el que debemos evaluar a $f^{(4)}$ ES EL PUNTO MEDIO DEL INTERVALO en que se evalúa la integral [0 , 2.88601]

Entonces: **$f^{(4)}$ (1.443005) = -18*1.443005 = -25.97409** **El error es:** **(en este caso, el paso h vale 0.180375625)**	$E_T = -(0.180375625)^4 \frac{2.86601-0}{180}(-25.97409)$ $E_T = -(0.180375625)^4 (0.015922277)(-25.97409)$ $E_T = -(0.00105855)(0.015922277)(-25.97409)$ $E_T = 0.000437781$

¿Con cuántas cifras decimales exactas estamos aproximando esa integral?

$$E_T <= 5 * 10^{-(K+1)}$$

$$4.37781 * 10^{-4} <= 5 * 10^{-4} \quad \text{Entonces } K = 3.$$

Ajustamos la integral:

Integral ajustada = Aproximación + E_T

Integral ajustada = 14.73424599 + 0.000437781 = 14.734683771

----------------------------- FIN DEL DOCUMENTO