ANÁLISIS NUMÉRICO

Mag. Carlos Alberto Ardila Albarracín

BLOQUE 3. INTEGRACIÓN NUMÉRICA

3.5. FÓRMULAS NEWTON-COTES: ESTIMACIÓN DE ERROR EN FUNCIONES NO POLINÓMICAS

EJEMPLO 1. ESTIMACIÓN DE ERROR PARA MÉTODOS DEL TRAPECIO, SIMPSON (1/3) Y SIMPSON (3/8)

Use las reglas de los Trapecios, Simpson (1/3) y Simpson (3/8), para estimar:

$$\int_{0}^{\pi/3} \mathrm{Sen}^2(x) \quad dx$$

¿Cuál es una cota para el error en la estimación, en cada caso?

Solución: En este ejemplo $f(x) = \mathrm{sen}^2(x)$, es una función continua en todo R , de modo que se pueden aplicar las reglas de integración numérica.

CASO SIMPLE:

N = 1 para la regla de los Trapecios,

N = 2 para la regla de Simpson (1/3) y

N = 3 para la regla de Simpson (3/8).

Primero, veamos cómo aproxima cada uno de los métodos a la integral mencionada en este caso simple:

Según la regla de los Trapecios:

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K
1	a	0,0000000				Xo	0,0000000	0,0000000		F(Xo)	Yo
2	b	1,0471976		(pi/3)		X1	1,0471976	0,7500000		F(X1)	Y1
3	n	1									

$$\Delta X = \frac{b - a}{n} = \frac{1{,}0471976 - 0{,}0000000}{1} = 1{,}0471976$$

$$I = (b - a)/(2*n) \, [\; Yo + Y1 \;]$$

$$I = 0{,}5235988 \, [\; 0{,}0000000 + 0{,}7500000 \;]$$

$$I = 0{,}5235988 \, [\; 0{,}7500000 \;]$$

$$I = 0{,}3926991$$

Según la regla de Simpson (1/3):

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L
1	a	0,0000000				Xo	0,0000000		0,0000000		F(Xo)	Yo
2	b	1,0471976			(pi/3)	X1	0,5235988		0,2500000		F(X1)	Y1
3	n	2				X2	1,0471976		0,7500000		F(X2)	Y2

$$\Delta X = \frac{b - a}{n} = \frac{1{,}0471976 - 0{,}0000000}{2} = 0{,}5235988$$

$$I = 0{,}5235988 \,/\, 3 \, [\; Yo + 4 \,(\; Y1 \;) + Y2 \;]$$

$$I = 0{,}5235988 \,/\, 3 \, [\; 0{,}0000000 + 4 \,(\; 0{,}2500000 \;) + 0{,}7500000 \;]$$

$$I = 0{,}5235988 \,/\, 3 \, [\; 0{,}0000000 + 1{,}0000000 + 0{,}7500000 \;]$$

$$I = 0{,}5235988 \,/\, 3 \, [\; 1{,}7500000 \;]$$

$$I = 0{,}1745329 \, [\; 1{,}7500000 \;]$$

$$I = 0{,}3054326$$

Según la regla de Simpson (3/8):

a	0,0000000		Xo	0,0000000	0,0000000	F(Xo)	Yo
b	1,0471976	(pi/3)	X1	0,3490659	0,1169778	F(X1)	Y1
n	3		X2	0,6981317	0,4131759	F(X2)	Y2
			X3	1,0471976	0,7500000	F(X3)	Y3

$$\Delta X = \frac{b - a}{n} = \frac{1{,}0471976 - 0{,}0000000}{3} = \mathbf{0{,}3490659}$$

$$I = (3\ (0{,}3490659)\ / 8)\quad Yo + 3 * Y1 + 3 * Y2 + Y3$$

$$I = (1{,}0471976\ / 8)\quad 0{,}0000000 + 3 * 0{,}1169778 + 3 * 0{,}4131759 + 0{,}7500000$$

$$I = (0{,}1308997)\quad 0{,}0000000 + 0{,}3509333 + 1{,}2395277 + 0{,}7500000$$

$$I = (0{,}1308997)\quad 2{,}3404611$$

$$I = \mathbf{0{,}3063656}$$

¿Cuál de estas aproximaciones es la mejor?

Estudiemos el error para cada caso.

Estimación de error en regla de los Trapecios:

$$E_T = -\frac{h^3}{12} f''(\xi) \text{ con } \xi \in \left(0, \frac{\pi}{3}\right), \quad h = b - a = \frac{\pi}{3}$$

Como $f(x) = \operatorname{sen}^2 x$, entonces

$$f'(x) = 2 \operatorname{sen} x \cos x = \operatorname{sen}(2x), \quad f''(x) = 2\cos(2x)$$

$$\left(f'''(x) = -4\operatorname{sen}(2x), \; f^{(iv)}(x) = -8\cos(2x) \right)$$

luego

$$|f''(x)| = |2\cos(2x)| < 2 \text{ para todo } x \in \left(0, \frac{\pi}{3}\right)$$

y entonces

$$|E_T| = \frac{h^3}{12} |f''(\xi)| \le \frac{\left(\frac{\pi}{3}\right)^3}{12} 2 = 0.191396$$

Aquí entra en juego esta regla:

Se dice que el número x* aproxima con sus primeras k-cifras decimales exactas al número x, si k es el mayor entero no negativo tal que

$$\mathbf{E = |x - x^*| <= 5*10^{-(k+1)}}$$

Las k cifras decimales exactas, son las primeras k cifras contadas a partir del punto decimal en x*, cuando x* se escribe en forma decimal.

Como $1.91396 * 10^{-1} < 5*10^{-(1)}$, eso implica que k = 0

Lo que no garantiza que el valor obtenido aproxime al valor exacto con alguna cifra decimal exacta.

Estimación de Error en Regla de Simpson (1/3):

$$E_T = -\frac{h^5}{90} f^{(iv)}(\xi) \text{ para algún } \xi \in \left(0, \frac{\pi}{3}\right), \quad h = \frac{b-a}{2} = \frac{\pi}{6}$$

y como

$$\left| f^{(iv)}(x) \right| = \left| -8\cos(2x) \right| < 8 \quad \text{para todo } x \in \left(0, \frac{\pi}{3}\right)$$

entonces

$$\left| E_T \right| = \frac{h^5}{90} \left| f^{(iv)}(\xi) \right| \le \frac{\left(\frac{\pi}{6}\right)^5}{90} 8 \quad \mathbf{= 0.0034981}$$

$0.0034981 = 3.4981 * 10^{-3}$

Y como: $3.4981 * 10^{-3} < 5*10^{-(3)}$ implica que k = 2

Lo que asegura una precisión de por lo menos dos (2) cifras decimales exactas en la aproximación obtenida aplicando la regla de Simpson (1/3).

Finalmente ajustamos la integral:

Integral ajustada = Aproximación + E_T

Ojo que en estos casos **E_T** se trabaja con los signos como vengan.

Para este ejemplo tenemos que **$E_T = -(h^5/90)*f^{(4)}(\varepsilon)$. Y aquí $f^{(4)}(\varepsilon) = -8$.**

Entonces **$E_T = -((\pi/6)^5/90)*(-8) = 0.0034981$**

Integral ajustada = 0.3054326 + (0.0034981)

Integral ajustada = **0.30**89307

Estimación de Error en Regla de Simpson (3/8):

$$E_T = -\frac{3h^5}{80} f^{(iv)}(\xi) \text{ para algún } \xi \in \left(0, \frac{\pi}{3}\right), \quad h = \frac{b-a}{3} = \frac{\pi}{9}$$

entonces

$$|E_T| = \frac{3h^5}{80} \left| f^{(iv)}(\xi) \right| \leq \frac{3\left(\frac{\pi}{9}\right)^5}{80} 8 = \mathbf{0.0015547}$$

$0.0015547 = 1.5547 * 10^{-3}$

Y como: $1.5547 * 10^{-3} < 5*10^{-(3)}$ implica que k = 2

Lo que asegura una precisión de por lo menos dos (2) cifras decimales exactas en la aproximación obtenida aplicando la regla de Simpson (3/8).

Finalmente ajustamos la integral:

Integral ajustada = Aproximación + E_T

Ojo que en estos casos **E_T** se trabaja con los signos como vengan.

Para este ejemplo tenemos que **$E_T = -(3h^5/80)*f^{(4)}(\varepsilon)$. Y aquí $f^{(4)}(\varepsilon) = -8$**

Entonces **$E_T = -(3(\pi/9)^5/80)*(-8) = 0.0015547$**

Integral ajustada = 0.3063656 + (0.0015547)

Integral ajustada = **0.30**7̲9203

Extensión del Ejemplo 1: Si con Simpson (1/3) hubiéramos usado 8 segmentos en lugar de 2, tendríamos la siguiente aproximación:

a	0,0	Número de franjas PAR
b	1,04719755 (pi/3)	
n	8	

Xo	0,00000000	0,00000000	Yo
X1	0,13089969	0,01703709	Y1
X2	0,26179939	0,06698730	Y2
X3	0,39269908	0,14644661	Y3
X4	0,52359878	0,25000000	Y4
X5	0,65449847	0,37059048	Y5
X6	0,78539816	0,50000000	Y6
X7	0,91629786	0,62940952	Y7
X8	1,04719755	0,75000000	Y8

$$\Delta X = \frac{b - a}{n} = \frac{1,04719755 - 0,00000000}{8} = \mathbf{0,130899694}$$

$$I = 0,1308997 \;/\; 3 \;[\; Yo + 4 \;(\; Y1 + Y3 + Y5 + Y7 \;) + 2 \;(\; Y2 + Y4 + Y6 \;) + Y8 \;]$$

$$I = 0,1308997 \;/\; 3 \;[\; 0,00000000 + 4 \;(\; 0,01703709 + 0,14644661 + 0,37059048 + 0,62940952 \;) + 2 \;(\; 0,06698730 + 0,25000000 + 0,50000000 \;) + 0,75000000 \;]$$

$$I = 0,1308997 \;/\; 3 \;[\; 0,00000000 + 4 \;(\; 1,16348370 \;) + 2 \;(\; 0,81698730 \;) + 0,75000000 \;]$$

$$I = 0,1308997 \;/\; 3 \;[\; 0,00000000 + 4,65393479 + 1,63397460 + 0,75000000 \;]$$

$$I = 0,1308997 \;/\; 3 \;[\; 7,03790938 \;]$$

$$I = 0,04363323 \;[\; 7,03790938 \;]$$

$$\mathbf{I = 0,30708673}$$

En este caso $h = ((\pi/3)-0) / 8 = (\pi/24)$

$$|E_T| = ((h)^5/90) * |\, f^{(4)}(\varepsilon) \,|$$

$$|E_T| = ((\pi/24)^5/90) * |\,(8)\,| = 3.41618 * 10^{-6}$$

$$E_T = -(h^5/90)*f^{(4)}(\varepsilon). \quad \text{Y aquí } \; f^{(4)}(\varepsilon) = -8$$

Y como: $3.41618 * 10^{-6} < 5*10^{-(6)}$ implica que k = 5

Lo que asegura una precisión de por lo menos cinco (5) cifras decimales exactas en la aproximación obtenida aplicando la regla de Simpson (1/3).

Finalmente ajustamos la integral:

Integral ajustada = Aproximación + E_T

Ojo que en estos casos **E_T** se trabaja con los signos como vengan.

Para este ejemplo tenemos que **$E_T = -(h^5/90)*f^{(4)}(\varepsilon)$. Y aquí $f^{(4)}(\varepsilon) = -8$.**

Entonces **$E_T = -((\pi/24)^5/90)*(-8) = 3.41618*10^{-6}$**

Integral ajustada = **0.30708673 + ($3.41618*10^{-6}$) = 0.30709014**

EJEMPLO 2. **Dada la siguiente integral:**

$\int_{1}^{3} 5x\ \mathrm{sen}(x)\ dx$	Use el método de Simpson (1/3) con 32 segmentos y determine **el valor del error** y la **integral ajustada**. Use el método de Simpson (3/8) con 33 segmentos y determine **el valor del error** y la **integral ajustada**.

Primero, aproximamos la integral con el método de Simpson (1/3):

```
M E T O D O   S I M P S O N   ( 1 / 3 )

Limite Inferior (a) : 1
Limite Superior (b) : 3
Limites leidos. a = 1 , b = 3

Cantidad de segmentos : 32

Segmentos leidos. N = 32
Suma de las Y = 674.3830308
I N T E G R A L  =  14.04964647
```

Ahora, aproximamos la integral con el método de Simpson (3/8):

```
M E T O D O   S I M P S O N   ( 3 / 8 )

Limite Inferior (a) : 1
Limite Superior (b) : 3
Limites leidos. a = 1 , b = 3

Cantidad de segmentos: 33

Segmentos leidos. N = 33
Suma de las Y = 618.1845486
I N T E G R A L  =  14.04964883
```

Procedemos al calcular las cotas de error. Como la función NO ES polinómica, se debe aplicar el método que se indica a continuación.

En ambos casos, para calcular el error con Simpson (1/3) y con Simpson (3/8) se necesita determinar cuál es el mayor valor absoluto de $\mathbf{f^{(4)}(x)}$ en [1 , 3].

$$f(x) = 5x \sin(x)$$

$$f^{(1)}(x) = 5 (\sin(x) + x\cos(x))$$

$$f^{(2)}(x) = 10\cos(x) - 5x\sin(x)$$

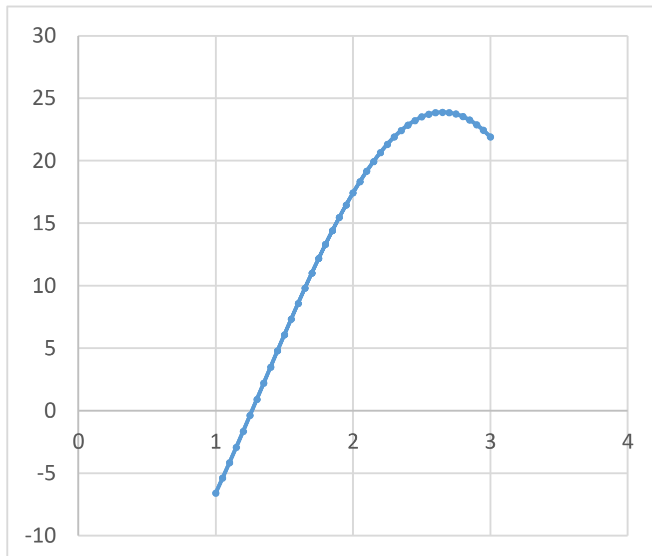
$$f^{(3)}(x) = -5(3\sin(x) + x\cos(x))$$

$$f^{(4)}(x) = 5x \sin(x) - 20\cos(x)$$

El mayor valor que toma la función **$f^{(4)}(x)$** en el intervalo mencionado es de 23.886049

Graficamos:

x	5x sin(x) - 20cos(x)
1	-6,5986912
1,05	-5,397449
1,1	-4,1702819
1,15	-2,9213562
1,2	-1,6549206
1,25	-0,3752934
1,3	0,9131516
1,35	2,2059989
1,4	3,4988053
1,45	4,7871138
1,5	6,0664684
1,55	7,3324276
1,6	8,5805793
1,65	9,8065543
1,7	11,006041
1,75	12,174798
1,8	13,308671
1,85	14,403601
1,9	15,455642
1,95	16,460974
2	17,415911
2,05	18,316918
2,1	19,16062
2,15	19,943815
2,2	20,663483
2,25	21,316796
2,3	21,90113
2,35	22,414073
2,4	22,853432
2,45	23,217243
2,5	23,503774
2,55	23,711538
2,6	23,839293
2,65	**23,886049**
2,7	23,851071
2,75	23,733886
2,8	23,534281
2,85	23,252306
2,9	22,888279
2,95	22,442778
3	21,91665



Vemos que el mayor valor absoluto es igual a **23.886049**

(OJO que NO SIEMPRE está en los límites del rango)

Cota de Error para Simpson (1/3):

¡Tengan en cuenta que el paso h está en función de la cantidad de segmentos!

El paso es igual a: $h = \frac{b-a}{n} = \frac{3-1}{32} = 0.0625$

Y calculamos el error:

$$\left|E_T\right| = \frac{h^5}{90}\left|f^{(4)}(\varepsilon)\right| = \frac{(0.0625)^5}{90}(23.886049) = 0.000000253105 = 2.531*10^{-7}$$

Y como: **$2.531 * 10^{-7} < 5*10^{-(7)}$ implica que k = 6**
Lo que asegura una precisión de por lo menos SEIS (6) cifras decimales exactas en la aproximación obtenida aplicando la regla de Simpson (1/3).

Ajustamos la integral:
Integral ajustada = Aproximación + E_T

Ojo que en estos casos E_T se trabaja con los signos como vengan.

Para este ejemplo tenemos que E_T = **-** $(h^5/90) * f^{(4)}(\varepsilon)$. Y aquí $f^{(4)}(\varepsilon) = 23.886049$

Entonces E_T = **-** $((0.0625)^5/90) * (23.886049)$ = **-** $2.531 * 10^{-7}$

Integral ajustada = 14.04964647 **-** (0.000000253105) = 14.0496462168943

Cota de Error para Simpson (3/8):

¡Tengan en cuenta que el paso h está en función de la cantidad de segmentos!

El paso es igual a: $h = \frac{b-a}{n} = \frac{3-1}{33} = 0.06060$

Y calculamos el error:

$$\left|E_T\right| = \frac{3h^5}{80}\left|f^{(4)}(\varepsilon)\right| = \frac{3*(0.06060)^5}{80}(23.886049) = 0.000000217010 = 2.1701*10^{-7}$$

Y como **$2.1701 * 10^{-7} < 5*10^{-(7)}$ implica que k = 6**.
Lo que asegura una precisión de por lo menos SEIS (6) cifras decimales exactas en la aproximación obtenida aplicando la regla de Simpson (3/8).

Ajustamos la integral:
Integral ajustada = Aproximación + E_T

Ojo que en estos casos E_T se trabaja con los signos como vengan.

Para este ejemplo tenemos que E_T = **-** $(3h^5/80) * f^{(4)}(\varepsilon)$. Y aquí $f^{(4)}(\varepsilon) = 23.886049$

Entonces E_T = **-** $(3*(0.06060)^5/80) * (23.886049)$ = **-** $2.1701 * 10^{-7}$

Integral ajustada = 14.04964883 **-** (0.000000217010) = 14.0496486129

Ejemplo 3. Ahora bien, también se puede preguntar lo siguiente:

Para la integral del ejemplo anterior, usando el método de Simpson (1/3) ¿cuántos segmentos se requieren para obtener un error (Et) < 1*10^{-7}?

Basta con despejar n de la expresión para calcular E_T (y como ya tenemos ese valor):

$$|E_T| = \frac{h^5}{90}\left|f^{(4)}(\varepsilon)\right| \quad , \; dado\,que \quad h = \frac{(b-a)}{n}$$

$$|E_T| = \frac{\left(\frac{(b-a)}{n}\right)^5}{90}\left|f^{(4)}(\varepsilon)\right|$$

$$|E_T| = \frac{\frac{(b-a)^5}{n^5}}{90}\left|f^{(4)}(\varepsilon)\right|$$

$$|E_T| = \frac{(b-a)^5}{90n^5}\left|f^{(4)}(\varepsilon)\right|$$

$$n^5 = \frac{(b-a)^5}{90|E_T|}\left|f^{(4)}(\varepsilon)\right|$$

$$n = \sqrt[5]{\frac{(b-a)^5}{90|E_T|}\left|f^{(4)}(\varepsilon)\right|}$$

Como ya analizamos la función, vimos que el término $f^{(4)}(\varepsilon)$ = 23.886049, y E_T = 1*10^{-7}

Solo hay que reemplazar:

$$n = \sqrt[5]{\frac{(3-1)^5}{90(1*10^{-7})}(23.886049)} = 38.53$$

Y teniendo en cuenta lo que exige este método, la cantidad requerida de segmentos debe ser de 40.

Si usamos 40 segmentos veremos que h= 0.05, y que E_T = **8.2938*10^{-8}**

8.2938*10^{-8} < **5*10^{-7}** , entonces **k=6**

Usando el método de Simpson (3/8)
¿cuántos segmentos se requieren para obtener un error (Et) < 1*10^{-7}?

Basta con despejar n de la expresión para calcular E_T
(y como ya tenemos ese valor):

$$\left|E_T\right| = \frac{3h^5}{80}\left|f^{(4)}(\varepsilon)\right| \quad , \; dado\, que \quad h = \frac{(b-a)}{n}$$

$$\left|E_T\right| = \frac{3\left(\frac{(b-a)}{n}\right)^5}{80}\left|f^{(4)}(\varepsilon)\right|$$

$$\left|E_T\right| = \frac{3\left(\frac{(b-a)^5}{n^5}\right)}{80}\left|f^{(4)}(\varepsilon)\right|$$

$$\left|E_T\right| = \frac{3(b-a)^5}{80n^5}\left|f^{(4)}(\varepsilon)\right|$$

$$n^5 = \frac{3(b-a)^5}{80\left|E_T\right|}\left|f^{(4)}(\varepsilon)\right|$$

$$n = \sqrt[5]{\frac{3(b-a)^5}{80\left|E_T\right|}\left|f^{(4)}(\varepsilon)\right|}$$

Como ya analizamos la función,
vimos que el término $f^{(4)}(\varepsilon) = 23.886049$, y $E_T = 1*10^{-7}$

Solo hay que reemplazar:

$$n = \sqrt[5]{\frac{3(3-1)^5}{80(1*10^{-7})}(23.886049)} = 49.14$$

Y teniendo en cuenta lo que exige este método,
la cantidad requerida de segmentos debe ser de 51.

Si usamos 51 segmentos veremos que h= 0.0392157,
y que E_T = **2.4615*10^{-8}**

2.4615*10^{-8} < **5*10^{-8}** , entonces **k=7**

------------------------FIN DEL DOCUMENTO