



ANÁLISIS NUMÉRICO

Mag. Carlos Alberto Ardila Albarracín

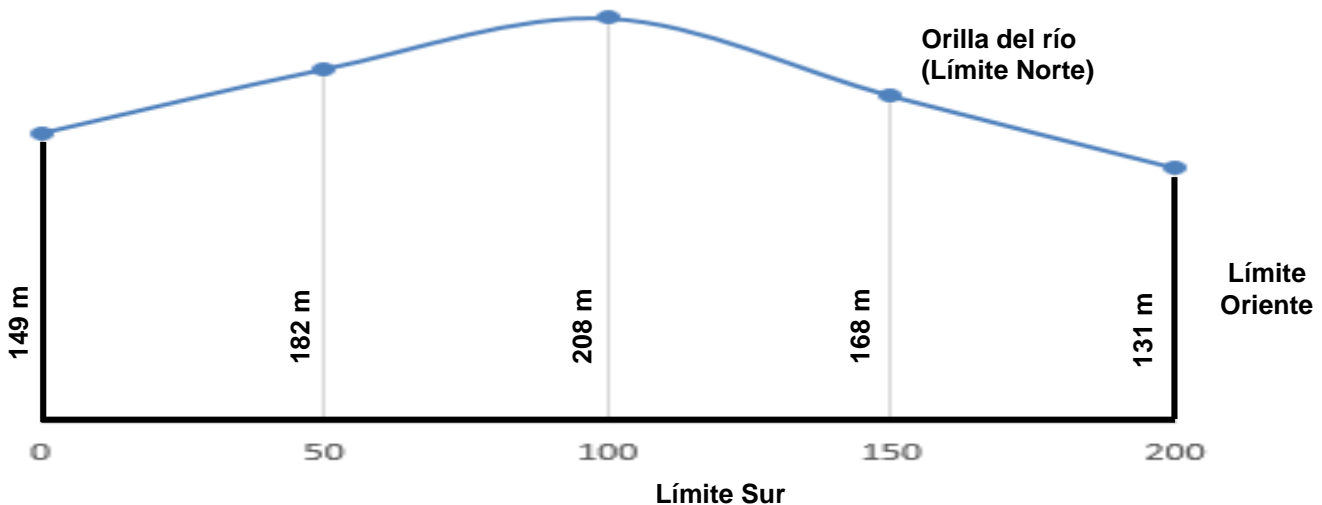
BLOQUE 3. INTEGRACIÓN NUMÉRICA

3.4. FÓRMULAS NEWTON COTES: INTEGRACIÓN A PARTIR DE TABLAS DE DATOS

3.4.1. Tablas con datos igualmente espaciados y cuya cantidad de segmentos permite trabajar TODA la Tabla con un mismo método.

EJEMPLO 1. CÁLCULO DEL ÁREA DE UN LOTE

Se ha subdividido un lote, para el cual se han definido sus límites Oriente, Occidente y Sur; el límite Norte es la orilla de un río. Se desea calcular la superficie de dicho lote para lo cual se tomaron varias medidas cada 50 metros, desde el límite sur hasta la orilla del río, obteniéndose lo siguiente:



Y aplicando el método de Simpson (1/3) dado que **son 4 segmentos**:

X ₀	0	149	F(X ₀)	Y ₀
X ₁	50	182	F(X ₁)	Y ₁
X ₂	100	208	F(X ₂)	Y ₂
X ₃	150	168	F(X ₃)	Y ₃
X ₄	200	131	F(X ₄)	Y ₄

$$a = 0,0 \quad \text{Número de franjas PAR} \quad b = 200,0 \quad n = 4$$

$$\Delta x = \frac{b - a}{n} = \frac{200,0 - 0,0}{4} = 50$$

$$I = \frac{50}{3} [Y_0 + 4 (Y_1 + Y_3) + 2 (Y_2) + Y_4]$$

$$I = \frac{50}{3} [149,0 + 4 (182,0 + 168,0) + 2 (208,0) + 131,0]$$

$$I = \frac{50}{3} [149,0 + 4 (350,0) + 2 (208,0) + 131,0]$$

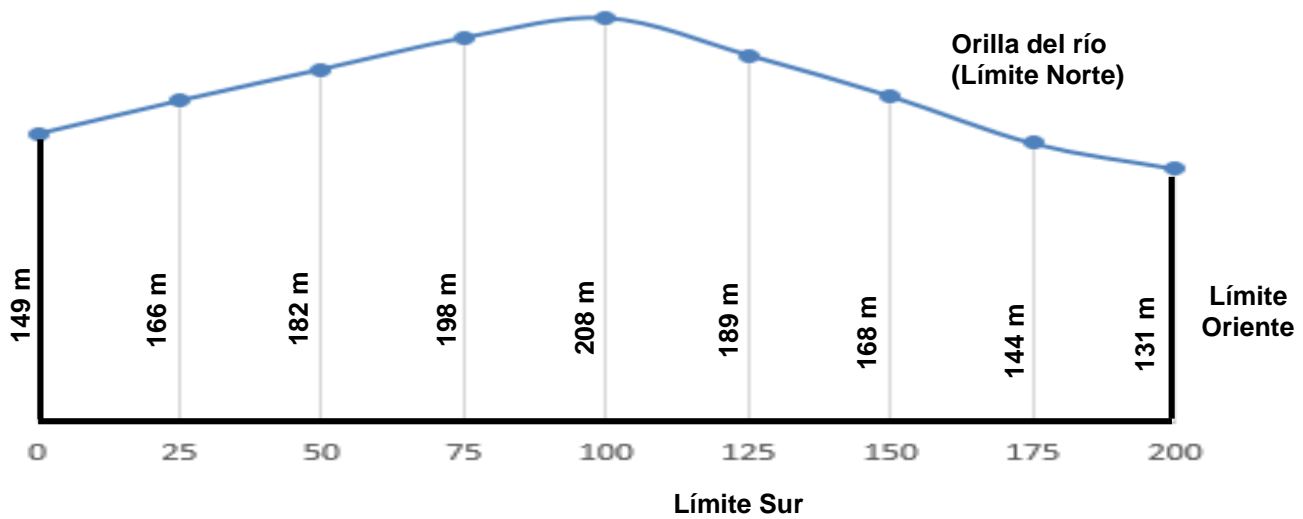
$$I = \frac{50}{3} [149,0 + 1400,0 + 416,0 + 131,0]$$

$$I = \frac{50}{3} [2096,0]$$

$$I = 16,66667 [2096,0]$$

$$I = 34933,33$$

Ahora comparemos si las medidas se tomaron cada 25 metros, obteniendo lo siguiente:



Y aplicando el método de Simpson (1/3) dado que **son 8 segmentos**:

a 0,0 Número de franjas PAR
 b 200,0
 n 8

X ₀	0	149	F(X ₀)	Y ₀
X ₁	25	166	F(X ₁)	Y ₁
X ₂	50	182	F(X ₂)	Y ₂
X ₃	75	198	F(X ₃)	Y ₃
X ₄	100	208	F(X ₄)	Y ₄
X ₅	125	189	F(X ₅)	Y ₅
X ₆	150	168	F(X ₆)	Y ₆
X ₇	175	144	F(X ₇)	Y ₇
X ₈	200	131	F(X ₈)	Y ₈

$$\Delta X = \frac{b - a}{n} = \frac{200,0}{8} - 0,0 = 25$$

$$I = \frac{25}{3} [Y_0 + 4 (Y_1 + Y_3 + Y_5 + Y_7) + 2 (Y_2 + Y_4 + Y_6) + Y_8]$$

$$I = \frac{25}{3} [149 + 4 (166 + 198 + 189 + 144) + 2 (182 + 208 + 168) + 131]$$

$$I = \frac{25}{3} [149 + 4 (697) + 2 (558) + 131]$$

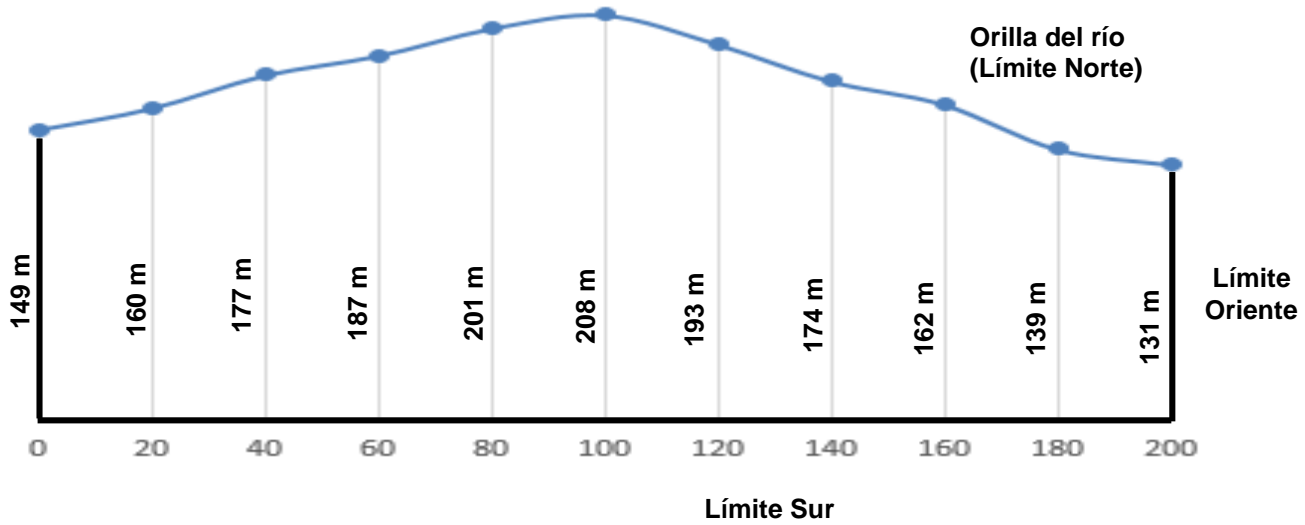
$$I = \frac{25}{3} [149 + 2788 + 1116 + 131]$$

$$I = \frac{25}{3} [4184]$$

$$I = 8,33 [4184]$$

$$I = 34866,67$$

Y ahora comparemos si las medidas se tomaron cada 20 metros, obteniendo lo siguiente:



Y aplicando el método de Simpson (1/3) dado que son 10 segmentos:

a 0,0 Número de franjas PAR
 b 200,0
 n 10

$$\Delta x = \frac{b - a}{n} = \frac{200,0 - 0,0}{10} = 20$$

X0	0	149	F(X0)	Y0
X1	20	160	F(X1)	Y1
X2	40	177	F(X2)	Y2
X3	60	187	F(X3)	Y3
X4	80	201	F(X4)	Y4
X5	100	208	F(X5)	Y5
X6	120	193	F(X6)	Y6
X7	140	174	F(X7)	Y7
X8	160	162	F(X8)	Y8
X9	180	139	F(X9)	Y9
X10	200	131	F(X10)	Y10

$$I = \frac{20}{3} [Y_0 + 4 (Y_1 + Y_3 + Y_5 + Y_7 + Y_9) + 2 (Y_2 + Y_4 + Y_6 + Y_8) + Y_{10}]$$

$$I = \frac{20}{3} [149 + 4 (160 + 187 + 208 + 174 + 139) + 2 (177 + 201 + 193 + 162) + 131]$$

$$I = \frac{20}{3} [149 + 4 (868) + 2 (733) + 131]$$

$$I = \frac{20}{3} [149 + 3472 + 1466 + 131]$$

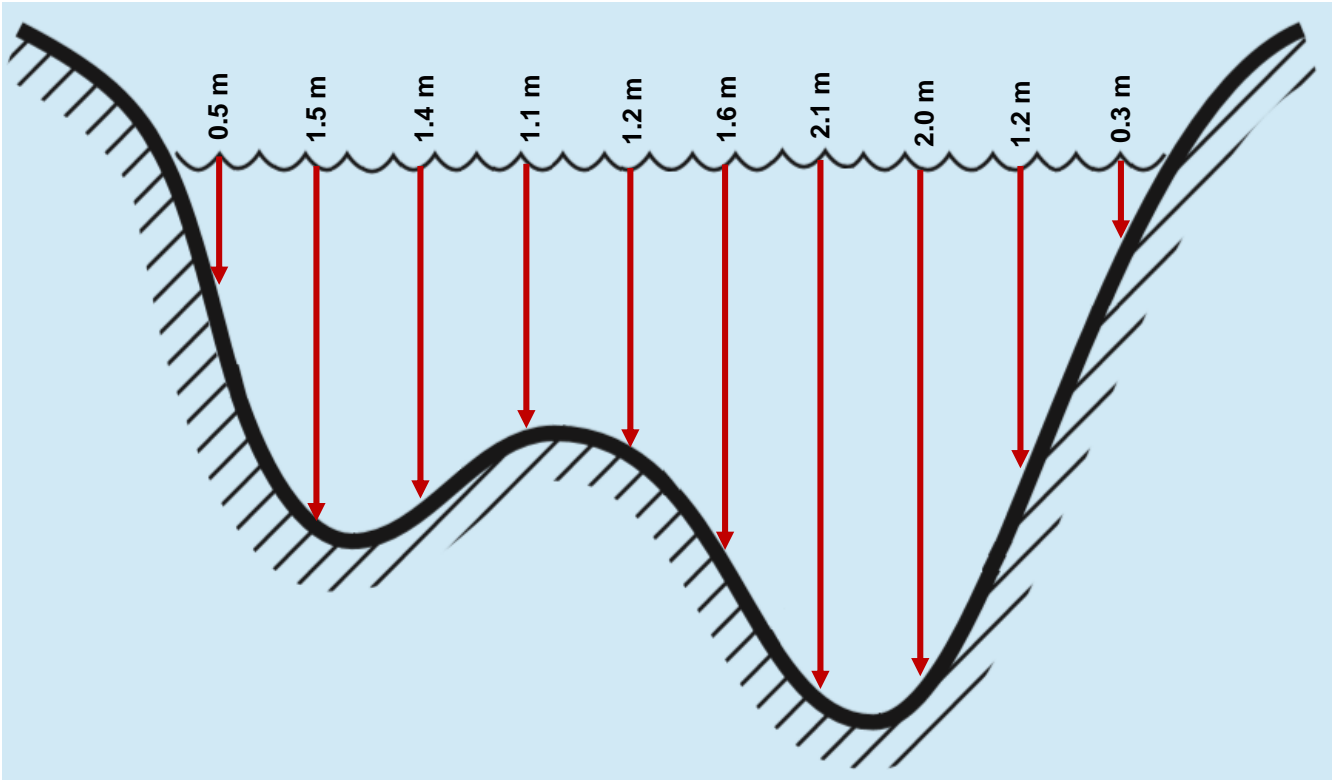
$$I = \frac{20}{3} [5218]$$

$$I = 6,67 [5218]$$

$$I = 34786,67$$

EJEMPLO 2. CÁLCULO ÁREA SECCIÓN TRANSVERSAL RÍO

Se desea calcular el área de la sección transversal de un río cuya sección a analizar tiene una anchura de 36 metros, para lo cual se tomaron varias medidas de profundidad cada 4 metros, obteniéndose lo siguiente:



Y aplicando el método de Simpson (3/ 8) dado que son 9 segmentos:

Integración numérica: Método de Simpson (3/8)

Número de franjas IMPAR	X0	0	0,5	Y0
Y	X1	4	1,5	Y1
Múltiplo de 3	X2	8	1,4	Y2
	X3	12	1,1	Y3
	X4	16	1,2	Y4
	X5	20	1,6	Y5
	X6	24	2,1	Y6
	X7	28	2,0	Y7
	X8	32	1,2	Y8
	X9	36	0,3	Y9

$$I = (3 (h) / 8) [Y_0 + 3 (Y_1 + Y_2 + Y_4 + Y_5 + Y_7 + Y_8) + 2 (Y_3 + Y_6) + Y_9]$$

$$I = (3 (4,0) / 8) [0,5 + 3 (1,5 + 1,4 + 1,2 + 1,6 + 2,0 + 1,2) + 2 (1,1 + 2,1) + 0,3]$$

$$I = 1,50 \qquad 33,90$$

$$I = 50,85$$

3.4.2. Tablas con datos igualmente espaciados y cuya cantidad de segmentos requiere combinar métodos.

Si tuviéramos la siguiente tabla de datos:

X₀	0,00000	0,20000	Y₀
X₁	0,04706	0,99959	Y₁
X₂	0,09412	1,27640	Y₂
X₃	0,14118	1,30746	Y₃
X₄	0,18824	1,28600	Y₄
X₅	0,23529	1,33258	Y₅
X₆	0,28235	1,50611	Y₆
X₇	0,32941	1,81498	Y₇
X₈	0,37647	2,22811	Y₈
X₉	0,42353	2,68604	Y₉
X₁₀	0,47059	3,11198	Y₁₀
X₁₁	0,51765	3,42294	Y₁₁
X₁₂	0,56471	3,54075	Y₁₂
X₁₃	0,61176	3,40317	Y₁₃
X₁₄	0,65882	2,97498	Y₁₄
X₁₅	0,70588	2,25901	Y₁₅
X₁₆	0,75294	1,30727	Y₁₆
X₁₇	0,80000	0,23200	Y₁₇

Una vez verificado que el paso es $h = 0.04706$, pero que contiene 17 segmentos, vemos que NO es posible aplicar un mismo método para toda la Tabla.

En este caso, habrá que particionar la tabla en 2 grupos de modo que se pueda trabajar un grupo con simpson (1/3) y el otro con simpson (3/8).

Esto será posible si tomamos los primeros 8 segmentos, desde X₀ hasta X₈ y se utilizan las fórmulas de Simpson (1/3)

X ₀	0,00000	0,20000	Y ₀
X ₁	0,04706	0,99959	Y ₁
X ₂	0,09412	1,27640	Y ₂
X ₃	0,14118	1,30746	Y ₃
X ₄	0,18824	1,28600	Y ₄
X ₅	0,23529	1,33258	Y ₅
X ₆	0,28235	1,50611	Y ₆
X ₇	0,32941	1,81498	Y ₇
X ₈	0,37647	2,22811	Y ₈
X ₉	0,42353	2,68604	Y ₉
X ₁₀	0,47059	3,11198	Y ₁₀
X ₁₁	0,51765	3,42294	Y ₁₁
X ₁₂	0,56471	3,54075	Y ₁₂
X ₁₃	0,61176	3,40317	Y ₁₃
X ₁₄	0,65882	2,97498	Y ₁₄
X ₁₅	0,70588	2,25901	Y ₁₅
X ₁₆	0,75294	1,30727	Y ₁₆
X ₁₇	0,80000	0,23200	Y ₁₇

Y se toman los otros 9 segmentos (valor impar y múltiplo de 3), desde X₈ (Sí, ¡desde X₈! ... para mantener la continuidad de la tabla) hasta X₁₇ y se utilizan las fórmulas de Simpson (3/8).

X ₀	0,00000	0,20000	Y ₀
X ₁	0,04706	0,99959	Y ₁
X ₂	0,09412	1,27640	Y ₂
X ₃	0,14118	1,30746	Y ₃
X ₄	0,18824	1,28600	Y ₄
X ₅	0,23529	1,33258	Y ₅
X ₆	0,28235	1,50611	Y ₆
X ₇	0,32941	1,81498	Y ₇
X ₈	0,37647	2,22811	Y ₈
X ₉	0,42353	2,68604	Y ₉
X ₁₀	0,47059	3,11198	Y ₁₀
X ₁₁	0,51765	3,42294	Y ₁₁
X ₁₂	0,56471	3,54075	Y ₁₂
X ₁₃	0,61176	3,40317	Y ₁₃
X ₁₄	0,65882	2,97498	Y ₁₄
X ₁₅	0,70588	2,25901	Y ₁₅
X ₁₆	0,75294	1,30727	Y ₁₆
X ₁₇	0,80000	0,23200	Y ₁₇

Cada subgrupo se trabaja como una tabla independiente (fíjense que en la segunda tabla se reinicia en Xo la numeración de los nodos)

Xo	0,00000	0,20000	Yo
X1	0,04706	0,99959	Y1
X2	0,09412	1,27640	Y2
X3	0,14118	1,30746	Y3
X4	0,18824	1,28600	Y4
X5	0,23529	1,33258	Y5
X6	0,28235	1,50611	Y6
X7	0,32941	1,81498	Y7
X8	0,37647	2,22811	Y8

$$I = 0,04706 / 3 [Y_0 + 4 (Y_1 + Y_3 + Y_5 + Y_7) + 2 (Y_2 + Y_4 + Y_6) + Y_8]$$

$$I = 0,04706 / 3 [0,20000 + 4 (0,99959 + 1,30746 + 1,33258 + 1,81498) + 2 (1,27640 + 1,28600 + 1,50611) + 2,22811]$$

$$I = 0,04706 / 3 [0,20000 + 4 (5,45461) + 2 (4,06851) + 2,22811]$$

$$I = 0,04706 / 3 [0,20000 + 21,81843 + 8,13703 + 2,22811]$$

$$I = 0,04706 / 3 [32,38357]$$

$$I = 0,01568667 [32,38357]$$

$$I = 0,5079903$$

Integración numérica: Método de Simpson (3/8)

Número de franjas IMPAR	Xo	0,37647	2,22811	Yo
Y	X1	0,42353	2,68604	Y1
Múltiplo de 3	X2	0,47059	3,11198	Y2
	X3	0,51765	3,42294	Y3
	X4	0,56471	3,54075	Y4
	X5	0,61176	3,40317	Y5
	X6	0,65882	2,97498	Y6
	X7	0,70588	2,25901	Y7
	X8	0,75294	1,30727	Y8
	X9	0,80000	0,23200	Y9

$$I = (3 (h) / 8) [Y_0 + 3 (Y_1 + Y_2 + Y_4 + Y_5 + Y_7 + Y_8) + 2 (Y_3 + Y_6) + Y_9]$$

$$I = (3 (0,04706) / 8) [2,22811 + 3 (2,68604 + 3,11198 + 3,54075 + 3,40317 + 2,25901 + 1,30727) + 2 (3,42294 + 2,97498) + 0,23200]$$

$$I = 0,017647500 [64,18062]$$

$$I = 1,132627444$$

Y finalmente se suman los resultados de aplicar la correspondiente fórmula en cada Tabla.

Integral Total = valor sección simpson (1/3) + valor sección simpson (3/8)

$$\text{Integral Total} = 0.5079903 + 1.1326274$$

$$\text{Integral Total} = 1.6406177$$

Esa suma representa el valor de la integral para la TABLA ORIGINAL

----- FIN DEL DOCUMENTO