ANÁLISIS NUMÉRICO

Mag. Carlos Alberto Ardila Albarracín

BLOQUE 3. INTEGRACIÓN NUMÉRICA

3.1. FÓRMULAS NEWTON-COTES: MÉTODO DEL TRAPECIO

MÉTODO DEL TRAPECIO

FÓRMULAS DE INTEGRACION DE NEWTON-COTES

Estas fórmulas se basan en la idea de integrar una función polinomial en vez de f(x) :

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{dx} \approx \int_a^b f_n(x)\,\mathrm{dx}$$

donde

$$f_n(x) = a_o + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n$$

es un polinomio de interpolación de grado n

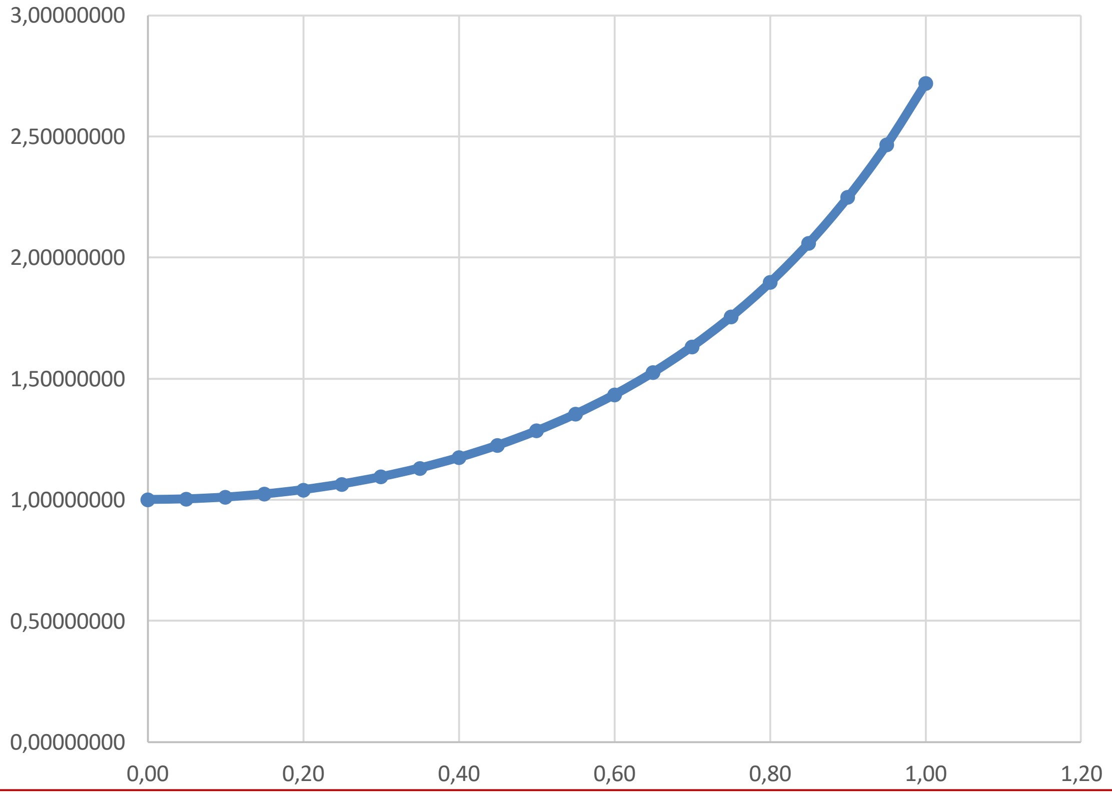
para ciertos datos de f(x) que se escogen apropiadamente

MÉTODO DEL TRAPECIO

Si queremos aproximar la siguiente integral

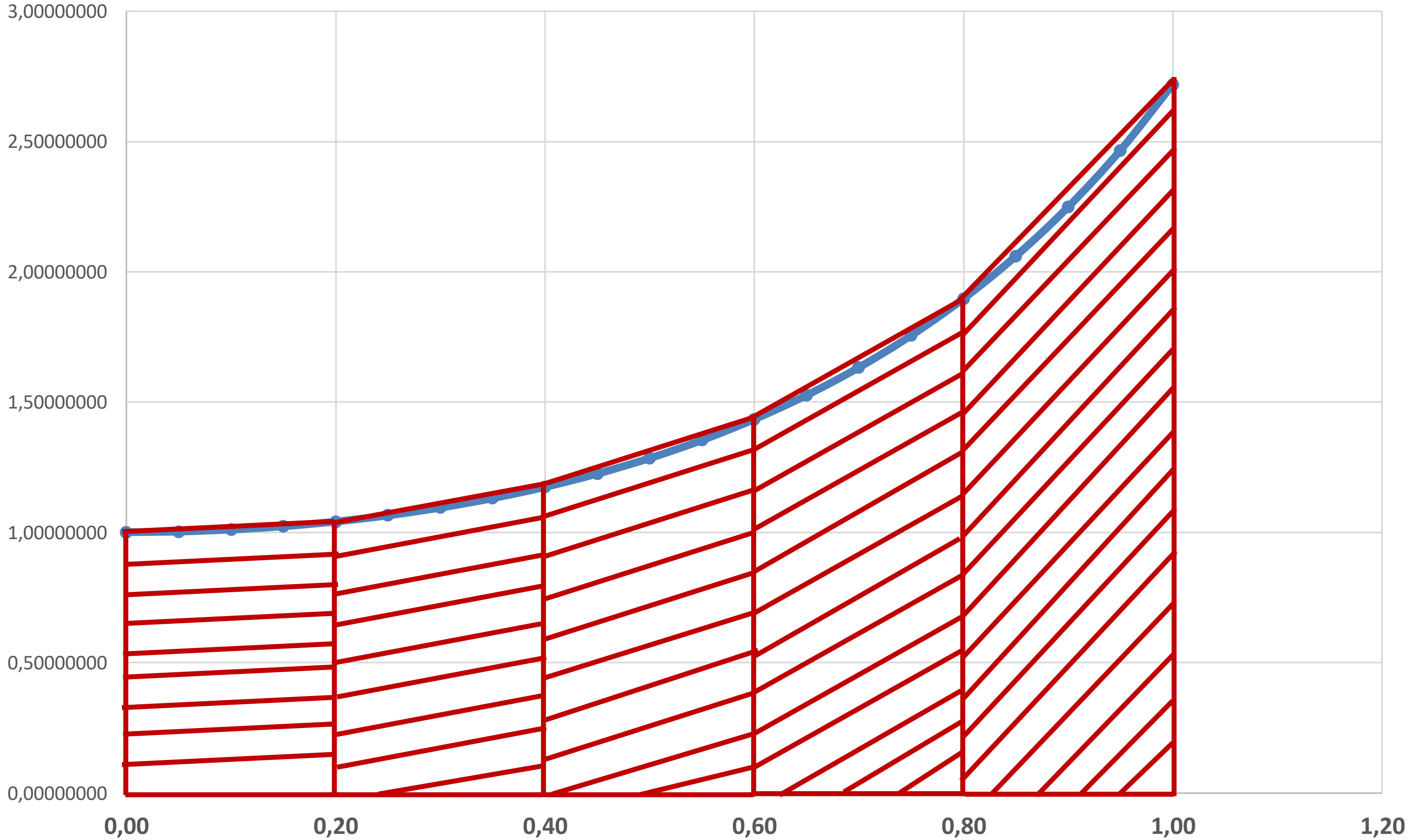
$$\int_0^1 e^{(x^2)}\ dx$$

Cuya gráfica es:



MÉTODO DEL TRAPECIO

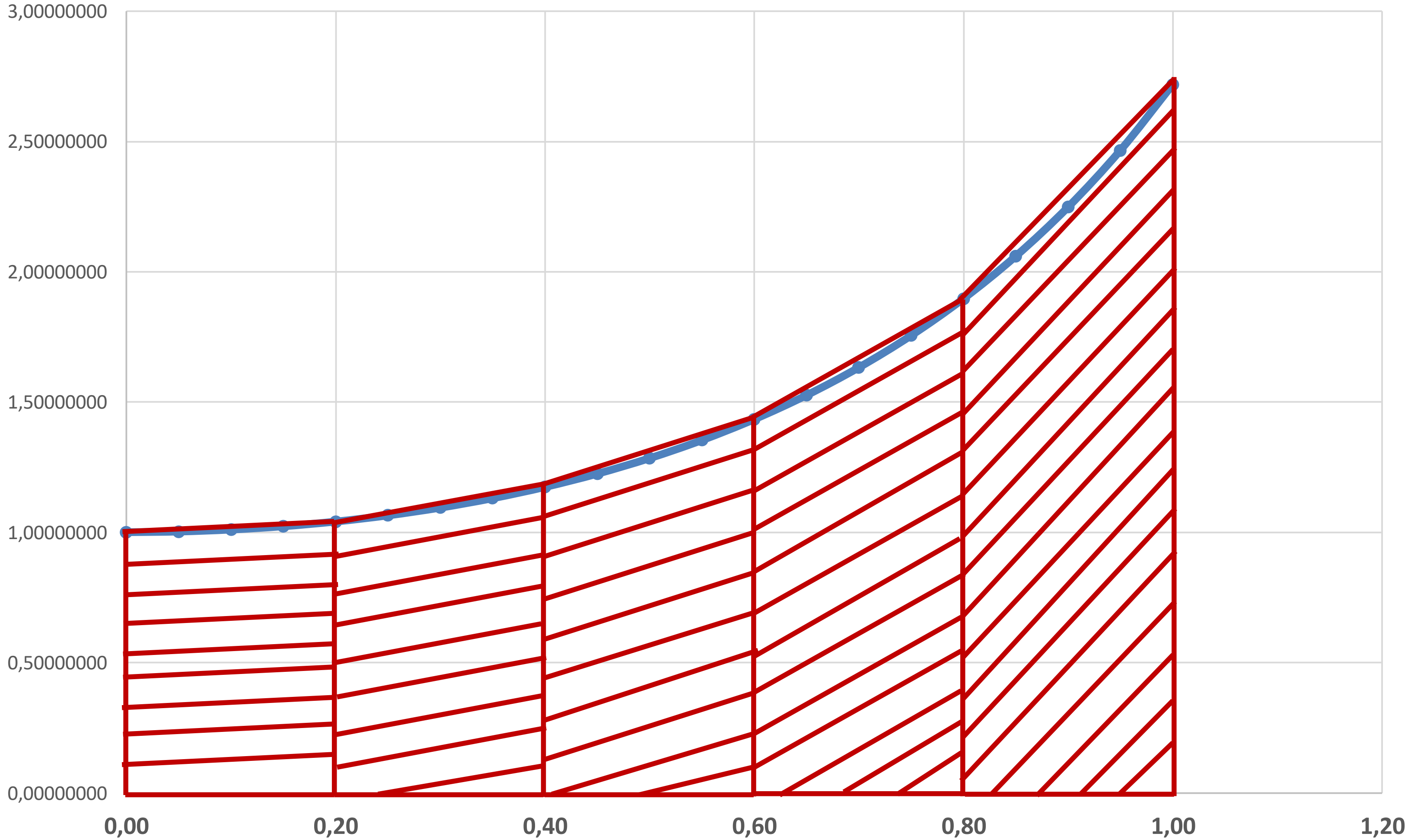
El método se basa en el principio de dividir el intervalo, en este caso [0 , 1] en varios segmentos (N) y cada uno de ellos tendrá forma de trapezoide:



MÉTODO DEL TRAPECIO

Todos los segmentos tienen la misma anchura (o paso): h = (b - a) / N

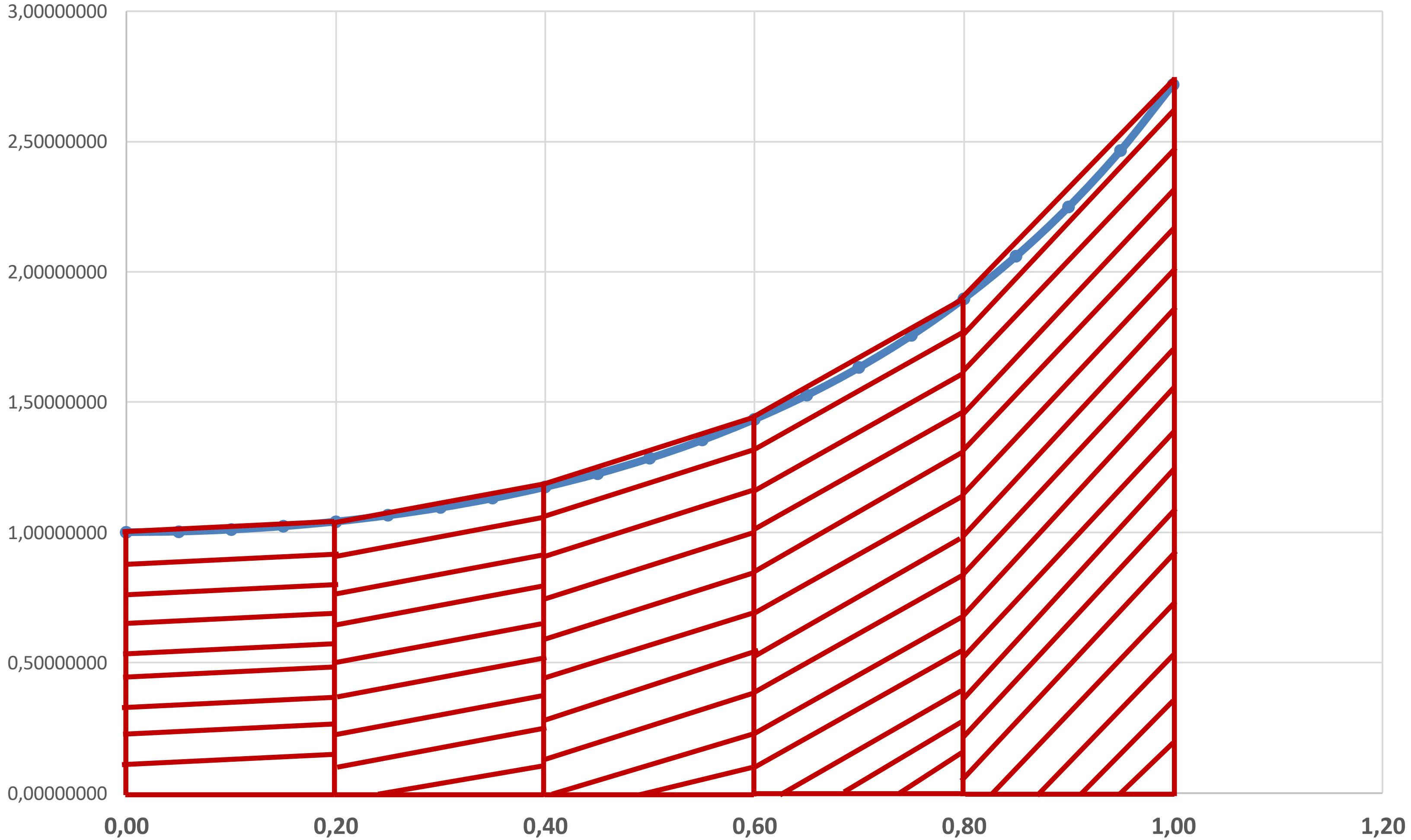
En este ejemplo, como se dividió en 5 segmentos, N = 5: h = (1 - 0) / 5 = 0.2



MÉTODO DEL TRAPECIO

Se calcula el área de cada uno de los trapezoides, y se suman esas áreas

La suma resultante es la aproximación de la integral



MÉTODO DEL TRAPECIO

Si queremos aproximar una integral con este método:

$$\int_0^1 e^{(x^2)}\ \mathrm{dx}$$

Se suministran las siguientes entradas:

Límite inferior de la integral (a) = 0

Límite superior de la integral (b) = 1

Cantidad de sub-intervalos o segmentos (N) = **5**

Este valor lo decide el usuario del método.

Se seleccionó un valor pequeño para que el ejemplo no resulte tan extenso.

MÉTODO DEL TRAPECIO

PASO 1: Calcular el paso (h). h = (b – a) / N

$$\Delta X = \frac{b - a}{N} = \frac{1,0 - 0,0}{5} = \mathbf{0,2}$$

PASO 2: Generar una tabla de 2 columnas donde:

El primer valor de la columna de las X (X_o) se inicializa en a

En ese valor X_o se evalúa la función contenida en la integral. Este será Y_o

Xo	**0,0**	**1,0000000**	**Yo**

MÉTODO DEL TRAPECIO

El siguiente valor en X (**X_1**) se obtiene al sumar al valor anterior de x el valor del paso (h):

$X_1 = X_0 + h$

En ese valor **X_1** se evalúa la función contenida en la integral. Este será **Y_1**

Xo	**0,0**	**1,0000000**	**Yo**
X1	**0,2**	**1,0408108**	**Y1**

Recuerde que en este ejemplo el paso h = 0,2

MÉTODO DEL TRAPECIO

Cada valor X (X_i) se obtiene al sumar al valor anterior de x el valor del paso (h):

$X_i = X_{i-1} + h$

Para cada valor X_i se evalúa la función contenida en la integral.
Este será Y_i

Xo	0,0	1,0000000	Yo
X1	0,2	1,0408108	Y1
X2	0,4	1,1735109	Y2
X3	0,6	1,4333294	Y3
X4	0,8	1,8964809	Y4
X5	1,0	2,7182818	Y5

Esta tabla tendrá una cantidad de filas igual a: Segmentos + 1

El valor X_n coincidirá con el límite superior de la integral

MÉTODO DEL TRAPECIO

La fórmula general es:

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{dx} \approx (b-a)\left[\frac{f(x_0)+2\sum_{i=1}^{n-1} f(x_i)+f(x_n)}{2n}\right]$$

Esta es la regla del trapecio para *n* subintervalos

Obviamente, esperamos que entre más subintervalos usemos,

mejor sea la aproximación a la integral (¡pero sin exagerar!)

MÉTODO DEL TRAPECIO

Paso 3: Aplicamos la fórmula

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{dx} \approx (b-a)\left[\frac{\boxed{f(x_0)}+\boxed{2\sum_{i=1}^{n-1} f(x_i)}+\boxed{f(x_n)}}{2n}\right]$$

$$\int_0^1 e^{(x^2)}\,\mathrm{dx} \approx (1-0)\left[\frac{f(0)+\boxed{2(f(0.2)+f(0.4)+f(0.6)+f(0.8))}+f(1)}{2(5)}\right]$$

MÉTODO DEL TRAPECIO

$$\int_0^1 e^{(x^2)}\ \mathrm{dx} \approx (1-0)\left[\frac{f(0)+2(f(0.2)+f(0.4)+f(0.6)+f(0.8))+f(1)}{2(5)}\right]$$

$$\int_0^1 e^{(x^2)}\ \mathrm{dx} \approx (1)\left[\frac{1+2(e^{(0.2)^2}+e^{(0.4)^2}+e^{(0.6)^2}+e^{(0.8)^2})+e}{10}\right]=1.48065$$

Cabe mencionar que el valor verdadero de esta integral es 1.4626…

MÉTODO DEL TRAPECIO

Así, vemos que con 5 subintervalos,

la aproximación solo permite obtener una cifra decimal

Para hacer cálculos con más subintervalos,

es conveniente elaborar un programa que aplique la fórmula

con el número de subintervalos que uno desee (¡OJO!)

y observar el comportamiento de la aproximación

MÉTODO DEL TRAPECIO

Fíjense que los valores utilizados en la fórmula se obtenían de evaluar

la función contenida en la integral

para cada uno de los valores de la partición…

$$\int_0^1 e^{(x^2)}\ \mathrm{dx} \approx (1)\left[\frac{1+2\left(e^{(0.2)^2}+e^{(0.4)^2}+e^{(0.6)^2}+e^{(0.8)^2}\right)+e}{10}\right] = 1.48065$$

Es decir,

¡NO HAY QUE BUSCAR ANTIDERIVADAS!

¡SE TRABAJA CON LA MISMA FUNCIÓN CONTENIDA EN LA INTEGRAL!

---------- FIN DEL DOCUMENTO