EJERCICIO 12. Determine si el Trazador cúbico natural que interpola la siguiente tabla

Xk	Yk
0	1
1	1
2	0
3	10

es o no la función

$$T(x) = \begin{cases} 1 + x - x^3 & , \quad x \in [0, 1] \quad \mathbf{To(x)} \\ 1 - 2(x-1) - 3(x-1)^2 + 4(x-1)^3 & , \quad x \in [1, 2] \quad \mathbf{T_1(x)} \\ 4(x-2) + 9(x-2)^2 - 3(x-2)^3 & , \quad x \in [2, 3] \quad \mathbf{T_2(x)} \end{cases}$$

SOLUCION. Hay necesidad de verificar cinco condiciones o propiedades:

PRIMERA: Los valores de la función deben ser iguales en los nodos interiores.

Para nuestro ejercicio, los nodos interiores son 1 y 2. Se traduce a lo siguiente:

$$\mathbf{To(1) = T_1(1)} \quad \textbf{y además} \quad \mathbf{T_1(2) = T_2(2)}$$

$To(1) =$ $1 + x - x^3 = 1 + 1 - (1)^3 = 1 + 1 - 1 =$ **1**

$T_1(1) =$ $1 - 2(x-1) - 3(x-1)^2 + 4(x-1)^3 = 1 - 2(1-1) - 3(1-1)^2 + 4(1-1)^3 = 1 - 2(0) - 3(0)^2 + 4(0)^3 =$ **1**

Cumple la primera subcondición.

$T_1(2) =$ $1 - 2(x-1) - 3(x-1)^2 + 4(x-1)^3 = 1 - 2(2-1) - 3(2-1)^2 + 4(2-1)^3 = 1 - 2(1) - 3(1)^2 + 4(1)^3 =$ **0**

$T_2(2) =$ $4(x-2) + 9(x-2)^2 - 3(x-2)^3 = 4(2-2) + 9(2-2)^2 - 3(2-2)^3 = 4(0) + 9(0)^2 - 3(0)^3 =$ **0**

Cumple la segunda subcondición.

Vemos que SÍ cumple la PRIMERA condición.

SEGUNDA: La primera y la última función deben pasar a través de los puntos finales.

Para nuestro ejercicio, los puntos finales, o mejor, nodos extremos son 0 y 3. Se traduce a lo siguiente:

$To(0) = 1$ y además $T_2(3) = 10$ (El 1 y el 10 se obtienen de la tabla inicial).

$To(0) =$ $1 + x - x^3 = 1 + 0 - (0)^3 =$ **1** Cumple la primera subcondición.

$T_2(3) =$ $4(x-2) + 9(x-2)^2 - 3(x-2)^3 = 4(3-2) + 9(3-2)^2 - 3(3-2)^3 = 4(1) + 9(1)^2 - 3(1)^3 = 4 + 9 - 3 =$ **10**

Cumple la segunda subcondición.

Vemos que SÍ cumple la SEGUNDA condición.

TERCERA: Las primeras derivadas en los nodos interiores deben ser iguales.

Para nuestro ejercicio, los nodos interiores son 1 y 2. Se traduce a lo siguiente:

$T'o(1) = T'_1(1)$ y además $T'_1(2) = T'_2(2)$

To(x) = $1 + x - x^3$ → **T'o(x) =** $\mathbf{1 - 3x^2}$

$T_1(x)$ = $1 - 2(x\text{-}1) - 3(x\text{-}1)^2 + 4(x\text{-}1)^3$

$T'_1(x)$ = $-2(1) - 3*2*(x\text{-}1)(1) + 4*3*(x\text{-}1)^2(1) = \mathbf{-2 - 6(x\text{-}1) + 12(x\text{-}1)^2}$

T'o(1) = $1 - 3x^2$ **=** $1 - 3(1)^2 = 1 - 3 =$ **-2**

$T'_1(1)$ = $-2 - 6(1\text{-}1) + 12(1\text{-}1)^2 = -2 - 6(0) + 12(0)^2 =$ **-2**

Cumple la primera subcondición.

$T'_1(2)$ = $-2 - 6(2\text{-}1) + 12(2\text{-}1)^2 = -2 - 6(1) + 12(1)^2 = -2 - 6 + 12 =$ **4**

$T_2(x)$ = $4(x\text{-}2) + 9(x\text{-}2)^2 - 3(x\text{-}2)^3$

$T'_2(x)$ = $4(1) + 9*2(x\text{-}2)(1) - 3*3(x\text{-}2)^2(1) =$ $\mathbf{4 + 18(x\text{-}2) - 9(x\text{-}2)^2}$

$T'_2(2)$ = $4 + 18(2\text{-}2) - 9(2\text{-}2)^2 = 4 + 18(0) - 9(0)^2 =$ **4**

Cumple la segunda subcondición.

Vemos que SÍ cumple la TERCERA condición.

CUARTA: Las segundas derivadas en los nodos interiores deben ser iguales.

Para nuestro ejercicio, los nodos interiores son 1 y 2. Se traduce a lo siguiente:

$T''o(1) = T''_1(1)$ y además $T''_1(2) = T''_2(2)$

To(x) = $1 + x - x^3$ → **T'o(x) =** $1 - 3x^2$ → **T''o(x) = – 6x**

$T_1(x)$ = $1 - 2(x\text{-}1) - 3(x\text{-}1)^2 + 4(x\text{-}1)^3$

$T'_1(x)$ = $-2 - 6(x\text{-}1) + 12(x\text{-}1)^2$ → **$T''_1(x)$ =** $-6(1)(1)(1) + 12*2(x\text{-}1)(1) =$ $\mathbf{-6 + 24(x\text{-}1)}$

$T_2(x)$ = $4(x\text{-}2) + 9(x\text{-}2)^2 - 3(x\text{-}2)^3$

$T'_2(x)$ = $4 + 18(x\text{-}2) - 9(x\text{-}2)^2$ → **$T''_2(x)$** = $18(1)(1)(1) - 9*2(x\text{-}2)(1) =$ $\mathbf{18 - 18(x\text{-}2)}$

$T''o(1) =$ $-6x = -6(1) =$ **-6**

$T''_1(1) =$ $-6 + 24(x-1)$ **=** $-6 + 24(1-1) = -6 + 24(0) =$ **-6**

Cumple la primera subcondición.

$T''_1(2) =$ $-6 + 24(x-1)$ **=** $-6 + 24(2-1) = -6 + 24(1) =$ **18**

$T''_2(2) =$ $18 - 18(x-2) = 18 - 18(2-2) = 18 - 18(0) =$ **18**

Cumple la segunda subcondición.

Vemos que SÍ cumple la CUARTA condición.

QUINTA: Las segundas derivadas en los nodos finales son cero.

Para nuestro ejercicio, los puntos finales, o mejor, nodos extremos son 0 y 3. Se traduce a lo siguiente:

$T''o(0) = 0$ y además $T''_2(3) = 0$

$T''o(0) =$ $-6x = -6(0) =$ **0** Cumple la primera subcondición.

$T''_2(3) =$ $18 - 18(x-2) = 18 - 18(3-2) = 18 - 18(1) =$ **0** Cumple la segunda subcondición.

Vemos que SÍ cumple la QUINTA condición.

NOTA: al cumplir esta quinta condición podemos afirmar que el trazador cúbico es natural o de frontera libre, de lo contrario se le denomina no natural o de frontera sujeta (o condicionada).

CONCLUSION: La función presentada al comienzo de este documento SÍ CUMPLE CON TODAS LAS CONDICIONES EXIGIDAS por lo tanto, ES UN TRAZADOR CUBICO NATURAL QUE INTERPOLA LOS DATOS DE LA TABLA ORIGINAL.

EJERCICIO 13. Determine si la siguiente función es un Trazador cúbico natural

$$T(x) = \begin{cases} 2(x+1) + (x+1)^3 & , \quad x \in [-1, 0] \quad \mathbf{To(x)} \\ 3 + 5x + 3x^2 & , \quad x \in [0, 1] \quad \mathbf{T_1(x)} \\ 11 + 11(x-1) + 3(x-1)^2 - (x-1)^3 & , \quad x \in [1, 2] \quad \mathbf{T_2(x)} \end{cases}$$

Nota: Si no se da una tabla de datos correspondiente a una cierta función f, se entiende que un Trazador cúbico natural es una función como se definió antes, pero satisfaciendo las condiciones PRIMERA, TERCERA, CUARTA Y QUINTA (No hay forma de verificar la segunda).

PRIMERA: Los valores de la función deben ser iguales en los nodos interiores.

Para nuestro ejercicio, los nodos interiores son 0 y 1. Se traduce a lo siguiente:

$To(0) = T_1(0)$ y además $T_1(1) = T_2(1)$

$To(0) =$ $2(x+1) + (x+1)^3 = 2(0+1) + (0+1)^3 = 2(1) + (1)^3 =$ **3**

$T_1(0) =$ $3 + 5x + 3x^2 = 3 + 5(0) + 3(0)^2 =$ **3**

Cumple la primera subcondición.

$T_1(1) =$ $3 + 5x + 3x^2 = 3 + 5(1) + 3(1)^2 =$ **11**

$T_2(1) =$ $11 + 11(x-1) + 3(x-1)^2 - (x-1)^3 = 11 + 11(1-1) + 3(1-1)^2 - (1-1)^3 =$ **11**

Cumple la segunda subcondición.

Vemos que SÍ cumple la PRIMERA condición.

TERCERA: Las primeras derivadas en los nodos interiores deben ser iguales.

Para nuestro ejercicio, los nodos interiores son 0 y 1. Se traduce a lo siguiente:

$T'o(0) = T'_1(0)$ y además $T'_1(1) = T'_2(1)$

$To(x) =$ $2(x+1) + (x+1)^3$ → **$T'o(x) =$** $2*(1)(1)(1) + 3(x+1)^2(1)$ **$= 2 + 3(x+1)^2$**

$T_1(x) =$ $3 + 5x + 3x^2$ → **$T'_1(x) = 5 + 6x$**

$T'o(0) =$ **$2 + 3(x+1)^2 = 2 + 3(0+1)^2 = 2 + 3(1)^2 =$ 5**

$T'_1(0) =$ **$5 + 6x = 5 + 6(0) =$ 5**

Cumple la primera subcondición.

$T'_1(1) =$ $5 + 6x = 5 + 6(1) = 11$

$T_2(x)$ = $11 + 11(x-1) + 3(x-1)^2 - (x-1)^3$

$T'_2(x)$ = $11(1)(1)(1) + 3*2(x-1)(1) - 3(x-1)^2(1)$ **$= 11 + 6(x-1) - 3(x-1)^2$**

$T'_2(1) = 11 + 6(x-1) - 3(x-1)^2 = 11 + 6(1-1) - 3(1-1)^2 = 11 + 6(0) - 3(0)^2 = 11$

Cumple la segunda subcondición.

Vemos que SÍ cumple la TERCERA condición.

CUARTA: Las segundas derivadas en los nodos interiores deben ser iguales.

Para nuestro ejercicio, los nodos interiores son 0 y 1. Se traduce a lo siguiente:

$T''o(0) = T''_1(0)$ y además $T''_1(1) = T''_2(1)$

$To(x)$ = $2(x+1) + (x+1)^3$ → **$T'o(x)$** $= 2 + 3(x+1)^2$ → **$T''o(x)$ =** $3*2(x+1)(1)$ **$= 6(x+1)$**

$T_1(x)$ = $3 + 5x + 3x^2$ **$T'_1(x) = 5 + 6x$** → **$T''_1(x) = 6$**

$T_2(x)$ = $11 + 11(x-1) + 3(x-1)^2 - (x-1)^3$

$T'_2(x)$ $= 11 + 6(x-1) - 3(x-1)^2$ → **$T''_2(x)$** $= 6(1)(1)(1) - 3*2(x-1)(1) =$ **$6 - 6(x-1)$**

$T''o(0) =$ $6(x+1) = 6(0+1) =$ **6** **$T''_1(0) = 6$** Cumple la primera subcondición.

$T''_1(1) = 6$ **$T''_2(1) =$** $6 - 6(x-1) = 6 - 6(1-1) =$ **6** Cumple la segunda subcondición.

Vemos que SÍ cumple la CUARTA condición.

QUINTA: Las segundas derivadas en los nodos finales son cero.

Para nuestro ejercicio, los puntos finales, o mejor, nodos extremos son -1 y 2. Se traduce a lo siguiente:

$T''o(-1) = 0$ y además $T''_2(2) = 0$

$T''o(-1) =$ $6(x+1) = 6(-1+1) =$ **0** Cumple la primera subcondición.

$T''_2(2) =$ $6 - 6(x-1) = 6 - 6(2-1) = 6 - 6(1) =$ **0** Cumple la segunda subcondición.

Vemos que SÍ cumple la QUINTA condición.

NOTA: al cumplir esta quinta condición podemos afirmar que el trazador cúbico es natural o de frontera libre, de lo contrario se le denomina no natural o de frontera sujeta (o condicionada).

CONCLUSION: La función presentada al comienzo de este documento SÍ CUMPLE CON TODAS LAS CONDICIONES EXIGIDAS por lo tanto, ES UN TRAZADOR CUBICO NATURAL.

PRIMERA: Los valores de la función deben ser iguales en los nodos interiores.

SEGUNDA: La primera y la última función deben pasar a través de los puntos finales.

TERCERA: Las primeras derivadas en los nodos interiores deben ser iguales.

CUARTA: Las segundas derivadas en los nodos interiores deben ser iguales.

QUINTA: Las segundas derivadas en los nodos finales son cero.
