ANÁLISIS NUMÉRICO

Mag. Carlos Alberto Ardila Albarracín

BLOQUE 2. AJUSTE DE CURVAS

TRAZADORES (SPLINES) CÚBICOS

En las sub-secciones anteriores, se usaron polinomios de n-ésimo grado para interpolar entre n + 1 puntos que se tenían como datos.

Un procedimiento alternativo consiste en colocar polinomios de grado inferior en subconjuntos de los datos. Tales polinomios conectores se denominan trazadores o splines.

Por ejemplo, las curvas de tercer grado empleadas para unir cada par de datos se llaman trazadores cúbicos.

El objetivo en los trazadores cúbicos es obtener un polinomio de tercer grado para cada intervalo entre los nodos:

$$f_i(x) = a_i x^3 + b_i x^2 + c_i x + d_i \qquad (18.35)$$

Así, para $n + 1$ datos ($i = 0, 1, 2,..., n$), existen n intervalos y, en consecuencia, $4n$ incógnitas a evaluar. Con los trazadores cúbicos se requieren $4n$ condiciones para evaluar las incógnitas. Éstas son:

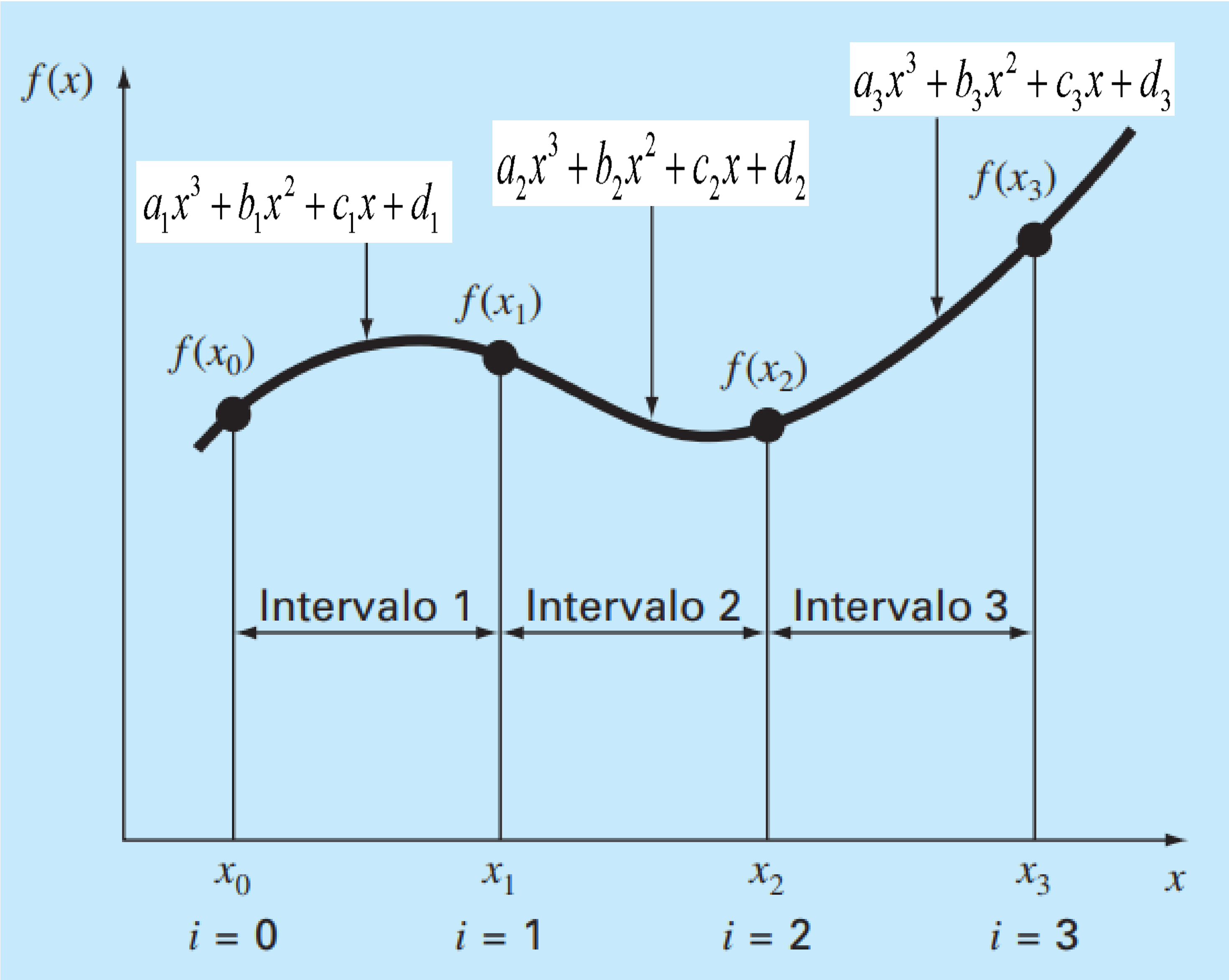
1. Los valores de la función deben ser iguales en los nodos interiores ($2n - 2$ condiciones).

2. La primera y última función deben pasar a través de los puntos extremos (2 condiciones).

3. Las primeras derivadas en los nodos interiores deben ser iguales ($n - 1$ condiciones).

4. Las segundas derivadas en los nodos interiores deben ser iguales ($n - 1$ condiciones).

5. Las segundas derivadas en los nodos extremos son cero (2 condiciones).


$f(x)$
$a_1x^3+b_1x^2+c_1x+d_1$
$a_2x^3+b_2x^2+c_2x+d_2$
$a_3x^3+b_3x^2+c_3x+d_3$
$f(x_0)$
$f(x_1)$
$f(x_2)$
$f(x_3)$
Intervalo 1
Intervalo 2
Intervalo 3
x_0
x_1
x_2
x_3
x
$i = 0$
$i = 1$
$i = 2$
$i = 3$

Ecuación cúbica en cada intervalo:

Los cinco tipos de condiciones anteriores proporcionan el total de las $4n$ ecuaciones requeridas para encontrar los $4n$ coeficientes. Mientras es posible desarrollar trazadores cúbicos de esta forma, presentaremos una técnica alternativa que requiere la solución de sólo $n - 1$ ecuaciones.

$$f_i(x) = \frac{f_i''(x_{i-1})}{6(x_i - x_{i-1})}(x_i - x)^3 + \frac{f_i''(x_i)}{6(x_i - x_{i-1})}(x - x_{i-1})^3 + \left[\frac{f(x_{i-1})}{x_i - x_{i-1}} - \frac{f''(x_{i-1})(x_i - x_{i-1})}{6}\right](x_i - x) + \left[\frac{f(x_i)}{x_i - x_{i-1}} - \frac{f''(x_i)(x_i - x_{i-1})}{6}\right](x - x_{i-1}) \quad (18.36)$$

Esta ecuación contiene sólo dos incógnitas (las segundas derivadas en los extremos de cada intervalo). Las incógnitas se evalúan empleando la siguiente ecuación:

$$(x_i - x_{i-1})f''(x_{i-1}) + 2(x_{i+1} - x_{i-1})f''(x_i) + (x_{i+1} - x_i)f''(x_{i+1})$$
$$= \frac{6}{x_{i+1} - x_i}[f(x_{i+1}) - f(x_i)] + \frac{6}{x_i - x_{i-1}}[f(x_{i-1}) - f(x_i)] \qquad (18.37)$$

Si se escribe esta ecuación para todos los nodos interiores, resultan $n - 1$ ecuaciones simultáneas con $n - 1$ incógnitas. (Recuerde que las segundas derivadas en los nodos extremos son cero.) La aplicación de estas ecuaciones se ilustra con el siguiente ejemplo.

Ajuste trazadores cúbicos a los siguientes datos. Utilice los resultados para estimar el valor en $x = 5$.

TABLA 18.1

Datos para ajustarse con trazadores.

x	$f(x)$
3.0	2.5
4.5	1.0
7.0	2.5
9.0	0.5

Solución. El primer paso consiste en usar la ecuación (18.37) para generar el conjunto de ecuaciones simultáneas que se utilizarán para determinar las segundas derivadas en los nodos. Por ejemplo, para el primer nodo interior se emplean los siguientes datos:

$$x_0 = 3 \qquad f(x_0) = 2.5$$

$$x_1 = 4.5 \qquad f(x_1) = 1$$

$$x_2 = 7 \qquad f(x_2) = 2.5$$

Estos valores se sustituyen en la ecuación (18.37):

$$(4.5-3)f''(3)+2(7-3)f''(4.5)+(7-4.5)f''(7) = \frac{6}{7-4.5}(2.5-1)+\frac{6}{4.5-3}(2.5-1)$$

Debido a la condición de trazador natural, $f''(3) = 0$, y la ecuación se reduce a

$$8f''(4.5) + 2.5f''(7) = 9.6$$

En una forma similar, la ecuación (18.37) se aplica al segundo punto interior con el siguiente resultado:

$$2.5f''(4.5) + 9f''(7) = -9.6$$

Estas dos ecuaciones se resuelven simultáneamente:

$$f''(4.5) = 1.67909$$

$$f''(7) = -1.53308$$

Estos valores se sustituyen después en la ecuación (18.36), junto con los valores de las x y las $f(x)$, para dar

$$f_1(x) = \frac{1.67909}{6(4.5-3)}(x-3)^3 + \frac{2.5}{4.5-3}(4.5-x) + \left[\frac{1}{4.5-3} - \frac{1.67909(4.5-3)}{6}\right](x-3)$$

$$f_1(x) = 0.186566(x-3)^3 + 1.666667(4.5-x) + 0.246894(x-3)$$

Esta ecuación es el trazador cúbico para el primer intervalo.

$$f_1(x) = 0.186566(x - 3)^3 + 1.666667(4.5 - x) + 0.246894(x - 3)$$

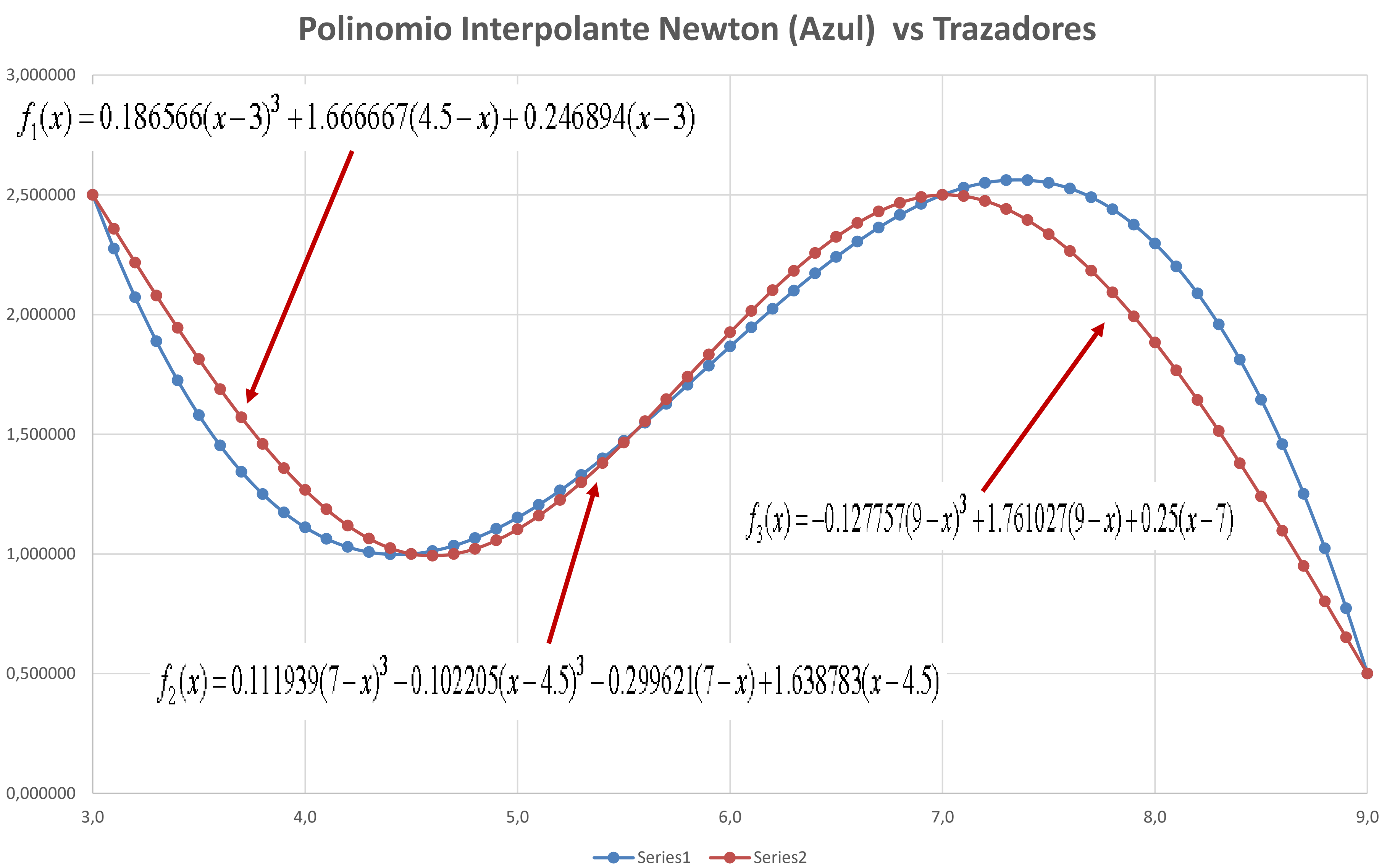
Se realizan sustituciones similares
para tener las ecuaciones para el segundo y tercer intervalo:

$$f_2(x) = 0.111939(7 - x)^3 - 0.102205(x - 4.5)^3 - 0.299621(7 - x) + 1.638783(x - 4.5)$$

$$f_3(x) = -0.127757(9 - x)^3 + 1.761027(9 - x) + 0.25(x - 7)$$

Las tres ecuaciones se pueden utilizar para calcular los valores dentro de cada intervalo.
Por ejemplo, el valor en $x = 5$, que está dentro del segundo intervalo, se calcula como sigue

$$f_2(5) = 0.111939(7 - 5)^3 - 0.102205(5 - 4.5)^3 - 0.299621(7 - 5) + 1.638783(5 - 4.5) = 1.102886$$



----*FIN DEL DOCUMENTO*