ANÁLISIS NUMÉRICO

Mag. Carlos Alberto Ardila Albarracín

BLOQUE 2. AJUSTE DE CURVAS

2.8. INTERPOLACION INVERSA

INTERPOLACIÓN INVERSA

Como la nomenclatura indica, los valores de f(x) y de x representan a la variable dependiente e independiente respectivamente.

En consecuencia, los valores de las x con frecuencia están espaciados uniformemente.

Un ejemplo simple es una tabla de valores obtenida para la función f(x) = 1/x

x	1	2	3	4	5	6	7
y	1	0.5	0.3333	0.25	0.2	0.1667	0.1429

INTERPOLACIÓN INVERSA

Ahora suponga que usted debe usar los mismos datos, pero que se le ha dado un valor de $f(x)$ y debe determinar el valor correspondiente de x

Por ejemplo, para los datos anteriores, suponga que se le pide determinar el valor de x que corresponda a $f(x) = 0.3$

En tal caso, como se tiene la función y es fácil de manipular, la respuesta correcta se determina directamente,

$$x = 1/0.3 = 3.3333$$

A ese problema se le conoce como interpolación inversa

INTERPOLACIÓN INVERSA

Ahora bien, Usted (¡Sí… Usted!)
puede sentirse tentado a intercambiar
los valores f(x) y x
[es decir, solo graficar x contra f(x)]…

…y usar un procedimiento como la interpolación de Lagrange
para determinar el resultado…

El asunto es que:

cuando usted invierte las variables
NO HAY GARANTÍA que los valores
junto con la nueva abscisa [las f(x) originales]
estén espaciados de una manera uniforme

INTERPOLACIÓN INVERSA

Es más, en muchos casos, los valores estarán "condensados".
Es decir, tendrán la apariencia de una escala logarítmica,
con algunos puntos adyacentes muy amontonados y otros muy dispersos.

Por ejemplo, para f(x) = 1/x el resultado es

x	0.1429	0.1667	0.2	0.25	0.3333	0.5	1
y	7	6	5	4	3	2	1

Tal espaciamiento no uniforme en las abscisas, a menudo lleva a oscilaciones en el resultado del polinomio de interpolación.

Esto puede ocurrir aun para polinomios de grado inferior.

INTERPOLACIÓN INVERSA

Una estrategia alterna es ajustar
un polinomio de interpolación de grado n , $\mathbf{f_n(x)}$,
a los **datos originales**

En la mayoría de los casos, como las **x** están espaciadas de manera uniforme, este polinomio no estará mal condicionado

La respuesta a su problema, entonces,
consiste en encontrar el valor de **x**
que haga este polinomio igual al dado por **f(x)**

Así, el problema de interpolación,
¡se reduce a un problema de búsqueda de raíces!
(El tema del primer parcial)

INTERPOLACIÓN INVERSA

Para el problema antes descrito, un procedimiento simple consiste en ajustar tres puntos a un polinomio cuadrático.

Teniendo en cuenta CUÁLES valores de “Y” acotan el valor planteado de 0.3

Tenemos un primer conjunto dado por:

(2 , 0.5) , (3 , 0.3333) y (4 , 0.25) con un rango en “Y” de 0.25

x	1	2	3	4	5	6	7
y	1	0.5	0.3333	0.25	0.2	0.1667	0.1429

0.25

INTERPOLACIÓN INVERSA

Para el Conjunto 1: (2 , 0.5) , (3 , 0.3333) y (4 , 0.25)

El polinomio de interpolación es:

$$f_2(x) = 0.5 - 0.1667(x - 2) + 0.041700(x - 2)(x - 3)$$

$$f_2(x) = 0.041667x^2 - 0.375x + 1.08333$$

La respuesta al problema de interpolación inversa para determinar la x correspondiente a f(x) = 0.3 será equivalente a calcular las raíces de

$$0.3 = 0.041667x^2 - 0.375x + 1.08333$$

$$f(x) = 0.041667x^2 - 0.375x + 1.08333 - 0.3 = 0$$

$$f(x) = 0.041667x^2 - 0.375x + 0.78333 = 0$$

En este caso simple, la fórmula cuadrática se utiliza para calcular las raíces:

x1 = 5.704158

x2= 3.295842

INTERPOLACIÓN INVERSA

Tenemos un segundo conjunto dado por:

(3 , 0.3333) , (4 , 0.25) y (5 , 0.2) con un rango en "Y" de 0.1333

x	1	2	3	4	5	6	7
y	1	0.5	0.3333	0.25	0.2	0.1667	0.1429

0.1333

Que al tener un rango en "Y" menor que el primer conjunto, debió elegirse desde un principio, pero trabajo ambos para confirmar esta propiedad (la de elegir el menor rango)

INTERPOLACIÓN INVERSA

Para el Conjunto 2: (3 , 0.3333) , (4 , 0.25) y (5 , 0.2)

El polinomio de interpolación es:

$$f_2(x) = 0,3333 \ -0,083300(x - 3) + 0,016650(x - 3)(x - 4)$$

$$f_2(x) = 0.0166x^2 - 0.1995x + 0.7824$$

La respuesta al problema de interpolación inversa para determinar la x correspondiente a f(x) = 0.3 será equivalente a calcular las raíces de

$$0.3 = 0.0166x^2 - 0.1995x + 0.7824$$

$$f(X) = 0.0166x^2 - 0.1995x + 0.7824 - 0.3 = 0$$

$$f(X) = 0.0166x^2 - 0.1995x + 0.4824 = 0$$

En este caso simple, la fórmula cuadrática se utiliza para calcular las raíces:

x1 = 8.663894 **x2= 3.354177**

INTERPOLACIÓN INVERSA

Comparamos los valores obtenidos:

Conjunto 1: (2 , 0.5) , (3 , 0.3333) y (4 , 0.25)

Raíz obtenida "útil": 3.295842

Conjunto 2: (3 , 0.3333) , (4 , 0.25) y (5 , 0.2)

Raíz obtenida "útil": 3.354177

Teniendo en cuenta que el valor verdadero es x = 3.333333, se aprecia que la raíz "útil" del conjunto 2 es la más cercana

La raíz 3.354177 confirma que:
se debe escoger el conjunto de puntos
cuyo rango de valores
de la variable "Y" sea más corto.

----FIN DEL DOCUMENTO