ANÁLISIS NUMÉRICO

Mag. Carlos Alberto Ardila Albarracín

BLOQUE 2. AJUSTE DE CURVAS
2.7. ESTIMACIÓN DE ERROR EN INTERPOLACIÓN

Use los polinomios interpolantes de **Lagrange** de grados uno, dos y tres, más apropiados, para aproximar f(2.5), si f(2.0)= 0.5103757 , f(2.2)= 0.5207843 , f(2.4)= 0.5104147 , f(2.6)= 0.4813306 y f(2.8)= 0.4359160.

SOLUCION. Podemos reorganizar los datos para llevarlos a un formato más familiar:

	Xi	F(Xi)	
Xo	2.0	0.5103757	F(Xo)
X1	2.2	0.5207843	F(X1)
X2	2.4	0.5104147	F(X2)
X3	2.6	0.4813306	F(X3)
X4	2.8	0.4359160	F(X4)

Y debemos aproximar teniendo a X = 2.5

Como **2.5 ∈[2.4 , 2.6]**, entonces el polinomio de interpolación de Lagrange de grado uno más apropiado, es el que se obtiene tomando los nodos **x0=2.4 y x1=2.6**, ya que éstos son los dos nodos más cercanos a 2.5.

Xo	2,4	0,5104147	F(Xo) (Yo)
X1	2,6	0,4813306	F(X1) (Y1)

	Lo(X)
	L1(X)

X	2,5	?????	F(X)

$$f_1\ (x) = \frac{X - X1}{Xo - X1} f(Xo) + \frac{X - Xo}{X1 - Xo} f(X1)$$

$$f_1\ (x) = \frac{X - 2{,}6}{-0{,}2}\ 1 + \frac{X - 2{,}4}{0{,}2}\ 0{,}4813306 \quad = \quad -2{,}55\ (X - 2{,}6) + 2{,}406653\ (X - 2) \quad \text{POLINOMIO}$$

$$f_1\ (2{,}5) = \frac{2{,}5 - 2{,}6}{2{,}4 - 2{,}6}\ 1 + \frac{2{,}5 - 2{,}4}{2{,}6 - 2{,}4}\ 0{,}4813306$$

$$f_1\ (2{,}5) = \frac{-0{,}1}{-0{,}2}\ 1 + \frac{0{,}1}{0{,}2}\ 0{,}4813306$$

$$f_1\ (2{,}5) = 0{,}5\ \ 1 + 0{,}5\ \ 0{,}4813306$$

$$f_1\ (2{,}5) = 0{,}25520735 + 0{,}2406653$$

$$f_1\ (2{,}5) = \boxed{0{,}49587265} \quad \text{INTERPOLACION}$$

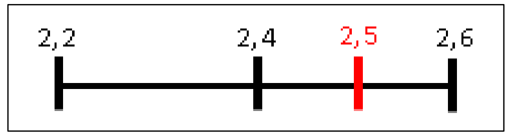
Para el caso de grado dos, habría dos polinomios interpolantes igualmente apropiados:

Un primer polinomio se obtiene tomando los nodos x0=2.2, x1=2.4 y x2=2.6

y el otro se obtiene tomando los nodos x0=2.4 , x1=2.6 y x2=2.8

La longitud de los intervalos es la misma (0.4), de modo que debemos generar 2 polinomios y luego tendremos que calcular el error de las interpolaciones.

(Favor hacer zoom)



Xo	2,2	0,5207843	F(Xo)	(Yo)
X1	2,4	0,5104147	F(X1)	(Y1)
X2	2,6	0,4813306	F(X2)	(Y2)
X	**2,5**	**?????**	**F(X)**	

$$f_2(x) = \frac{(X - X1)(X - X2)}{(Xo - X1)(Xo - X2)} f(Xo) + \frac{(X - Xo)(X - X2)}{(X1 - Xo)(X1 - X2)} f(X1) + \frac{(X - Xo)(X - X1)}{(X2 - Xo)(X2 - X1)} f(X2)$$

$$f_2(x) = 6{,}5098038\,(X - 2{,}4)(X - 2{,}6) + -12{,}7603675\,(X - 2)(X - 2{,}6) + 6{,}0166325\,(X - 2)(X - 2{,}4)$$

$$f_2(2{,}5) = \frac{(2{,}5 - 2{,}4)(2{,}5 - 2{,}6)}{(2{,}2 - 2{,}4)(2{,}2 - 2{,}6)} 0{,}5207843 + \frac{(2{,}5 - 2)(2{,}5 - 2{,}6)}{(2{,}4 - 2)(2{,}4 - 2{,}6)} 0{,}5104147 + \frac{(2{,}5 - 2)(2{,}5 - 2{,}4)}{(2{,}6 - 2)(2{,}6 - 2{,}4)} 0{,}4813306$$

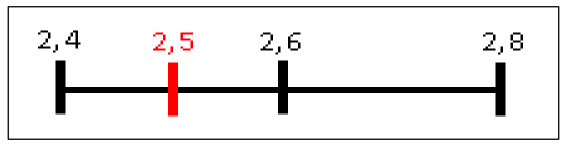
$$f_2(2{,}5) = \frac{(0{,}1)(-0{,}1)}{(-0{,}2)(-0{,}4)} 0{,}5207843 + \frac{(0{,}3)(-0{,}1)}{(0{,}2)(-0{,}2)} 0{,}5104147 + \frac{(0{,}3)(0{,}1)}{(0{,}4)(0{,}2)} 0{,}4813306$$

$$f_2(2{,}5) = \frac{-0{,}01}{0{,}08} 0{,}5207843 + \frac{-0{,}03}{-0{,}04} 0{,}5104147 + \frac{0{,}03}{0{,}08} 0{,}4813306$$

$$f_2(2{,}5) = \boxed{-0{,}1250000}\ 0{,}5207843 + \boxed{0{,}7500000}\ 0{,}5104147 + \boxed{0{,}3750000}\ 0{,}4813306$$

$$f_2(2{,}5) = \boxed{-0{,}0650980} + \boxed{0{,}3828110} + \boxed{0{,}1804990}$$

$$f_2(2{,}5) = \boxed{0{,}4982119625}$$



Xo	2,4	0,5104147	F(Xo)	(Yo)
X1	2,6	0,4813306	F(X1)	(Y1)
X2	2,8	0,4359160	F(X2)	(Y2)
X	**2,5**	**?????**	**F(X)**	

$$f_2(x) = \frac{(X - X1)(X - X2)}{(Xo - X1)(Xo - X2)} f(Xo) + \frac{(X - Xo)(X - X2)}{(X1 - Xo)(X1 - X2)} f(X1) + \frac{(X - Xo)(X - X1)}{(X2 - Xo)(X2 - X1)} f(X2)$$

$$f_2(x) = 6{,}3801838\,(X - 2{,}6)(X - 2{,}8) + -12{,}0332650\,(X - 2)(X - 2{,}8) + 5{,}4489500\,(X - 2)(X - 2{,}6)$$

$$f_2(2{,}5) = \frac{(2{,}5 - 2{,}6)(2{,}5 - 2{,}8)}{(2{,}4 - 2{,}6)(2{,}4 - 2{,}8)} 0{,}5104147 + \frac{(2{,}5 - 2)(2{,}5 - 2{,}8)}{(2{,}6 - 2)(2{,}6 - 2{,}8)} 0{,}4813306 + \frac{(2{,}5 - 2)(2{,}5 - 2{,}6)}{(2{,}8 - 2)(2{,}8 - 2{,}6)} 0{,}4359160$$

$$f_2(2{,}5) = \frac{(-0{,}1)(-0{,}3)}{(-0{,}2)(-0{,}4)} 0{,}5104147 + \frac{(0{,}1)(-0{,}3)}{(0{,}2)(-0{,}2)} 0{,}4813306 + \frac{(0{,}1)(-0{,}1)}{(0{,}4)(0{,}2)} 0{,}4359160$$

$$f_2(2{,}5) = \frac{0{,}03}{0{,}08} 0{,}5104147 + \frac{-0{,}03}{-0{,}04} 0{,}4813306 + \frac{-0{,}01}{0{,}08} 0{,}4359160$$

$$f_2(2{,}5) = \boxed{0{,}3750000}\ 0{,}5104147 + \boxed{0{,}7500000}\ 0{,}4813306 + \boxed{-0{,}1250000}\ 0{,}4359160$$

$$f_2(2{,}5) = \boxed{0{,}1914055} + \boxed{0{,}3609980} + \boxed{-0{,}0544895}$$

$$f_2(2{,}5) = \boxed{0{,}4979139625}$$

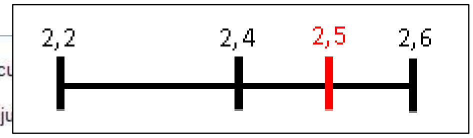
¿Cuál de todas las aproximaciones calculadas es la mejor?

Debemos calcular el error de la interpolación. Usaremos la expresión que se manejó en el método de Newton (sí.. el de Newton).

A continuación se muestra el cálculo del error para este polinomio de segundo orden, teniendo en cuenta los dos grupos de puntos:

Estimar el error del polinomio de segundo orden obtenido.
Para esto, se usa el dato adicional empleado (X3 = 2,8) en la interpolación cúbica. Con ello se calcu

En este caso, como en la mayoría, no se conoce el valor verdadero, se usa la siguiente ecuación, ju



$$R_2 = F[X3, X2, X1, Xo]\,(x - xo)(x - x1)(x - x2)$$

$$R_2 = 0{,}049666666667\,(x - 2{,}2)(x - 2{,}4)(x - 2{,}6)$$

$$R_2 = 0{,}049666666667\,(2{,}5 - 2{,}2)(2{,}5 - 2{,}4)(2{,}5 - 2{,}6)$$

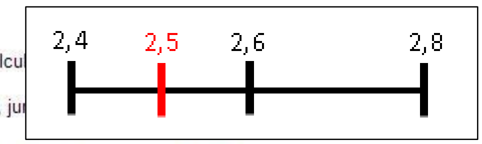
$$R_2 = 0{,}049666666667\,(0{,}3)(0{,}1)(-0{,}1)$$

$$R_2 = 0{,}049666666667\;\boxed{-0{,}003}$$

$$R_2 = \boxed{-0{,}000149000000}$$

Estimar el error del polinomio de segundo orden obtenido.
Para esto, se usa el dato adicional empleado (X3 = 2,2) en la interpolación cúbica. Con ello se calcul

En este caso, como en la mayoría, no se conoce el valor verdadero, se usa la siguiente ecuación, ju



$$R_2 = F[X3, X2, X1, Xo]\,(x - xo)(x - x1)(x - x2)$$

$$R_2 = 0{,}049666666667\,(x - 2{,}4)(x - 2{,}6)(x - 2{,}8)$$

$$R_2 = 0{,}049666666667\,(2{,}5 - 2{,}4)(2{,}5 - 2{,}6)(2{,}5 - 2{,}8)$$

$$R_2 = 0{,}049666666667\,(0{,}1)(-0{,}1)(-0{,}3)$$

$$R_2 = 0{,}049666666667\;\boxed{0{,}003}$$

$$R_2 = \boxed{0{,}000149000000}$$

Como puede verse el error absoluto en ambos casos es de 0.000149.
De modo que cualquiera de las 2 interpolaciones se puede elegir.

Lo que sucede es que para este ejemplo, los rangos son la de misma longitud y además hay total simetría en la ubicación del nodo (x=2.5) con respecto a los extremos del rango. Pero en términos generales, de dos aproximaciones calculadas que utilicen el mismo número de nodos, se espera que sea mejor la que use los nodos más cercanos al dato a interpolar.

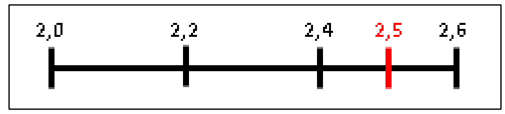
Para el caso de grado tres, habría dos polinomios interpolantes igualmente apropiados:

Un primer polinomio se obtiene tomando los nodos x0=2.0, x1=2.2, x2=2.4 y x3=2.6

y el otro se obtiene tomando los nodos x0=2.2, x1=2.4, x2=2.6 y x3=2.8

La longitud de los intervalos es la misma (0.6), de modo que debemos generar 2 polinomios y luego tendremos que calcular el error de las interpolaciones.

Xo	2,0	0,5103757	F(Xo)	(Yo)
X1	2,2	0,5207843	F(X1)	(Y1)
X2	2,4	0,5104147	F(X2)	(Y2)
X3	2,6	0,4813306	F(X3)	(Y3)
X	2,5	????	F(X)	



$$f_3(x) = \frac{(X - X1)(X - X2)(X - X3)}{(Xo - X1)(Xo - X2)(Xo - X3)} f(Xo) + \frac{(X - Xo)(X - X2)(X - X3)}{(X1 - Xo)(X1 - X2)(X1 - X3)} f(X1) +$$
$$\frac{(X - Xo)(X - X1)(X - X3)}{(X2 - Xo)(X2 - X1)(X2 - X3)} f(X2) + \frac{(X - Xo)(X - X1)(X - X2)}{(X3 - Xo)(X3 - X1)(X3 - X2)} f(X3)$$

$$f_3(x) = -10{,}6328271\,(X - 2)(X - 2)(X - 3) + 32{,}5490188\,(X - 2)(X - 2{,}4)(X - 3) +$$
$$-31{,}9009188\,(X - 2)(X - 2)(X - 3) + 10{,}0277208\,(X - 2)(X - 2{,}2)(X - 2)$$

$$f_3(2{,}5) = \frac{(2{,}5 - 2)(3 - 2{,}4)(2{,}5 - 2{,}6)}{(2 - 2)(2 - 2{,}4)(2 - 2{,}6)} 0{,}5103757 + \frac{(3 - 2)(3 - 2{,}4)(3 - 2{,}6)}{(2 - 2)(2 - 2{,}4)(2 - 2{,}6)} 0{,}5207843 +$$
$$\frac{(2{,}5 - 2)(3 - 2{,}2)(2{,}5 - 2{,}6)}{(2{,}4 - 2)(2 - 2{,}2)(2{,}4 - 2{,}6)} 0{,}5104147 + \frac{(3 - 2)(3 - 2{,}2)(3 - 2{,}4)}{(3 - 2)(3 - 2{,}2)(3 - 2{,}4)} 0{,}4813306$$

$$f_3(2{,}5) = \frac{(0{,}3)(0{,}1)(-0{,}1)}{(-0{,}2)(-0{,}4)(-0{,}6)} 0{,}5103757 + \frac{(0{,}5)(0{,}1)(-0{,}1)}{(0{,}2)(-0{,}2)(-0{,}4)} 0{,}5207843 +$$
$$\frac{(0{,}5)(0{,}3)(-0{,}1)}{(0{,}4)(0{,}2)(-0{,}2)} 0{,}5104147 + \frac{(0{,}5)(0{,}3)(0{,}1)}{(0{,}6)(0{,}4)(0{,}2)} 0{,}4813306$$

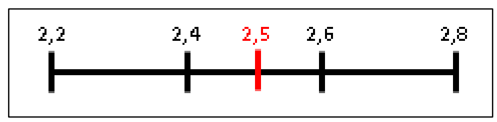
$$f_3(2{,}5) = \frac{-0{,}003}{-0{,}048} 0{,}5103757 + \frac{-0{,}005}{0{,}016} 0{,}5207843 +$$
$$\frac{-0{,}015}{-0{,}016} 0{,}5104147 + \frac{0{,}015}{0{,}048} 0{,}4813306$$

$$f_3(2{,}5) = \boxed{0{,}0625000}\; 0{,}5103757 + \boxed{-0{,}3125000}\; 0{,}5207843 + \boxed{0{,}9375000}\; 0{,}5104147 + \boxed{0{,}3125000}\; 0{,}4813306$$

$$f_3(2{,}5) = \boxed{0{,}0318985} + \boxed{-0{,}1627451} + \boxed{0{,}4785138} + \boxed{0{,}1504158}$$

$$f_3(2{,}5) = \boxed{0{,}49808298125}$$

Xo	2,2	0,5207843	F(Xo)	(Yo)
X1	2,4	0,5104147	F(X1)	(Y1)
X2	2,6	0,4813306	F(X2)	(Y2)
X3	2,8	0,4359160	F(X3)	(Y3)
X	2,5	????	F(X)	



$$f_3(x) = \frac{(X - X1)(X - X2)(X - X3)}{(Xo - X1)(Xo - X2)(Xo - X3)} f(Xo) + \frac{(X - Xo)(X - X2)(X - X3)}{(X1 - Xo)(X1 - X2)(X1 - X3)} f(X1) +$$
$$\frac{(X - Xo)(X - X1)(X - X3)}{(X2 - Xo)(X2 - X1)(X2 - X3)} f(X2) + \frac{(X - Xo)(X - X1)(X - X2)}{(X3 - Xo)(X3 - X1)(X3 - X2)} f(X3)$$

$$f_3(x) = -10{,}8496729\,(X - 2)(X - 3)(X - 3) + 31{,}9009188\,(X - 2)(X - 2{,}6)(X - 3) +$$
$$-30{,}0831625\,(X - 2)(X - 2)(X - 3) + 9{,}0815833\,(X - 2)(X - 2{,}4)(X - 3)$$

$$f_3(2{,}5) = \frac{(2{,}5 - 2)(3 - 2{,}6)(2{,}5 - 2{,}8)}{(2{,}2 - 2)(2 - 2{,}6)(2{,}2 - 2{,}8)} 0{,}5207843 + \frac{(3 - 2)(3 - 2{,}6)(3 - 2{,}8)}{(2 - 2)(2 - 2{,}6)(2 - 2{,}8)} 0{,}5104147 +$$
$$\frac{(2{,}5 - 2)(3 - 2{,}4)(2{,}5 - 2{,}8)}{(2{,}6 - 2)(3 - 2{,}4)(2{,}6 - 2{,}8)} 0{,}4813306 + \frac{(3 - 2)(3 - 2{,}4)(3 - 2{,}6)}{(3 - 2)(3 - 2{,}4)(3 - 2{,}6)} 0{,}4359160$$

$$f_3(2{,}5) = \frac{(0{,}1)(-0{,}1)(-0{,}3)}{(-0{,}2)(-0{,}4)(-0{,}6)} 0{,}5207843 + \frac{(0{,}3)(-0{,}1)(-0{,}3)}{(0{,}2)(-0{,}2)(-0{,}4)} 0{,}5104147 +$$
$$\frac{(0{,}3)(0{,}1)(-0{,}3)}{(0{,}4)(0{,}2)(-0{,}2)} 0{,}4813306 + \frac{(0{,}3)(0{,}1)(-0{,}1)}{(0{,}6)(0{,}4)(0{,}2)} 0{,}4359160$$

$$f_3(2{,}5) = \frac{0{,}003}{-0{,}048} 0{,}5207843 + \frac{0{,}009}{0{,}016} 0{,}5104147 +$$
$$\frac{-0{,}009}{-0{,}016} 0{,}4813306 + \frac{-0{,}003}{0{,}048} 0{,}4359160$$

$$f_3(2{,}5) = \boxed{-0{,}0625000}\; 0{,}5207843 + \boxed{0{,}5625000}\; 0{,}5104147 + \boxed{0{,}5625000}\; 0{,}4813306 + \boxed{-0{,}0625000}\; 0{,}4359160$$

$$f_3(2{,}5) = \boxed{-0{,}0325490} + \boxed{0{,}2871083} + \boxed{0{,}2707485} + \boxed{-0{,}0272448}$$

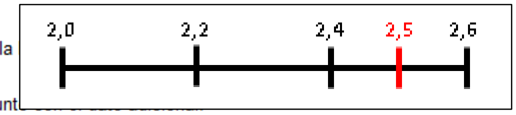
$$f_3(2{,}5) = \boxed{0{,}49806296250}$$

¿Cuál de todas las aproximaciones calculadas es la mejor?

Debemos calcular el error de la interpolación. Usaremos la expresión que se manejó en el método de Newton (sí.. el de Newton).

A continuación se muestra el cálculo del error para este polinomio de tercer orden, teniendo en cuenta los dos grupos de puntos:

Estimar el error del polinomio de segundo orden obtenido.
Para esto, se usa el dato adicional empleado (X4= 2,8) en la interpolación cúbica. Con ello se calcula



En este caso, como en la mayoría, no se conoce el valor verdadero, se usa la siguiente ecuación, junt

R_3 = F[X4, X3 , X2 , X1 , Xo] (x - xo) (x - x1) (x - x2) (x - x3)

R_3 = **0,008341145833** (x - 2,0) (x - 2,2) (x - 2,4) (x - 2,6)

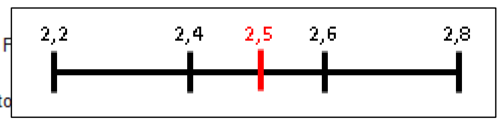
R_3 = **0,008341145833** (2,5 - 2,0) (2,5 - 2,2) (2,5 - 2,4) (2,5 - 2,6)

R_3 = **0,008341145833** (0,5) (0,3) (0,1) (-0,1)

R_3 = **0,008341145833** -0,0015

R_3 = **-0,000012511719**

Estimar el error del polinomio de segundo orden obtenido.
Para esto, se usa el dato adicional empleado (X4= 2,0) en la interpolación cúbica. Con ello se calcula F



En este caso, como en la mayoría, no se conoce el valor verdadero, se usa la siguiente ecuación, junto

R_3 = F[X4, X3 , X2 , X1 , Xo] (x - xo) (x - x1) (x - x2) (x - x3)

R_3 = **0,008341145833** (x - 2,2) (x - 2,4) (x - 2,6) (x - 2,8)

R_3 = **0,008341145833** (2,5 - 2,2) (2,5 - 2,4) (2,5 - 2,6) (2,5 - 2,8)

R_3 = **0,008341145833** (0,3) (0,1) (-0,1) (-0,3)

R_3 = **0,008341145833** 0,0009

R_3 = **0,000007507031**

Como puede verse, al calcular la interpolación de grado 4 y estimar el error R3, la mejor elección es

x0=2.2 , x1=2.4 , x2=2.6 , x3=2.8

ya que el error R3 dio un valor menor que el obtenido con el conjunto

x0=2.0 , x1=2.2 , x2=2.4 y x3=2.6

Esto se debe a que el punto a evaluar (2.5) queda en la mitad del intervalo conformado por el conjunto de puntos [2.2 … 2.8].

-------------------- FIN DEL DOCUMENTO