ANÁLISIS NUMÉRICO

Mag. Carlos Alberto Ardila Albarracín

BLOQUE 2. AJUSTE DE CURVAS

2.5. INTERPOLACION POR DIFERENCIAS DIVIDIDAS DE NEWTON

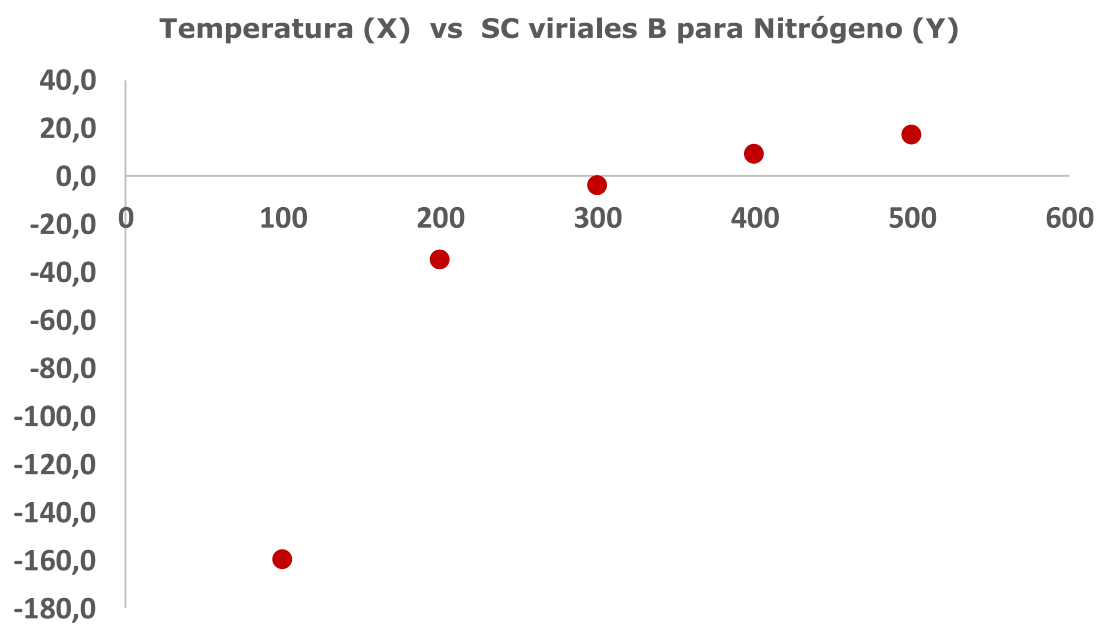
INTERPOLACIÓN: MÉTODO DE NEWTON

Considere la siguiente tabla de datos para el nitrógeno donde T es la temperatura y B es el segundo coeficiente virial. En estudio de gases, es el coeficiente más importante porque representa, en primer orden, la desviación respecto de la idealidad.

Dados estos datos:

Temperatura (K)	B (cm^3/mol)
X	Y
100	-160,0
200	-35,0
300	-4,2
400	9,0
500	16,9

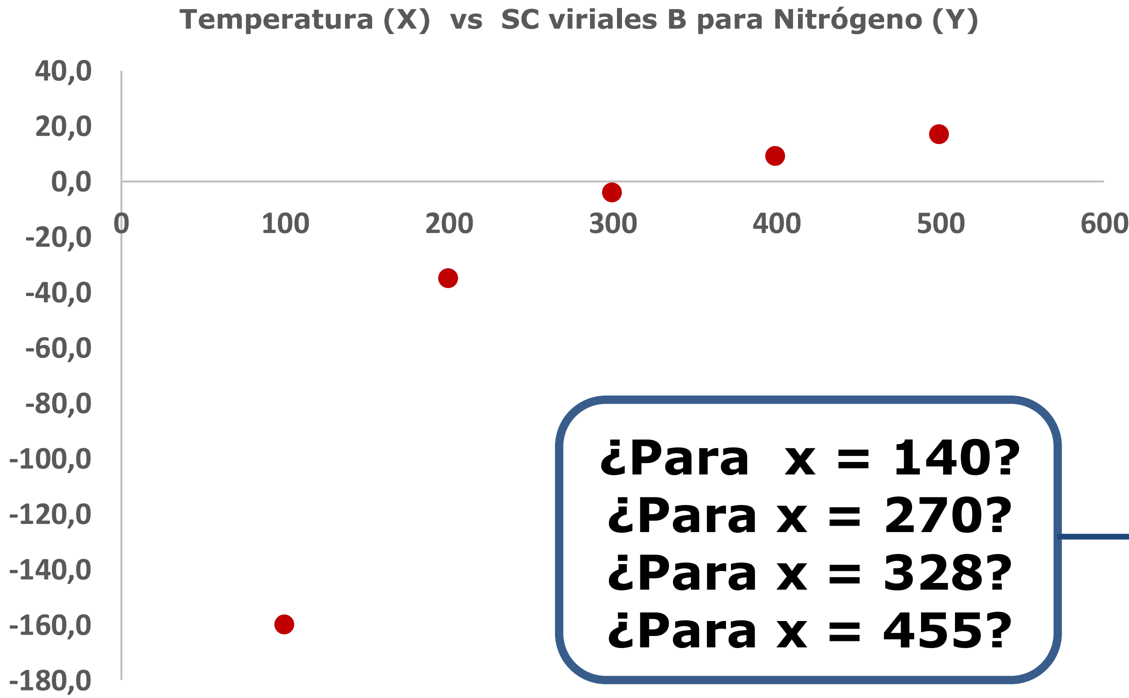
Y su correspondiente Diagrama de Dispersión…



INTERPOLACIÓN: MÉTODO DE NEWTON

...en ocasiones se requiere estimar valores intermedios entre datos definidos por puntos

Temperatura (K)	B (cm^3/mol)
X	Y
100	-160,0
200	-35,0
300	-4,2
400	9,0
500	16,9



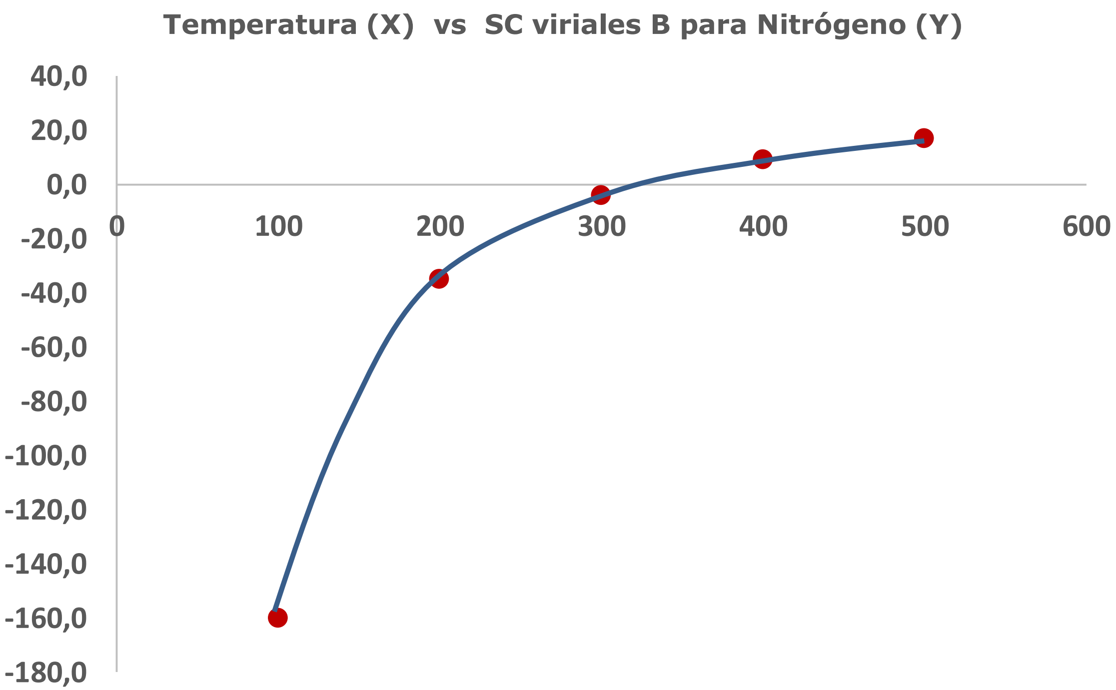
¿Para $x = 140$?
¿Para $x = 270$?
¿Para $x = 328$?
¿Para $x = 455$?

El método más común que se usa para este propósito es la INTERPOLACIÓN POLINOMIAL

INTERPOLACIÓN: MÉTODO DE NEWTON

Dados n + 1 puntos, hay uno y sólo un polinomio de **grado n** que pasa a través de **todos y cada uno** de los puntos.

$$f(x) = -2.67916667 * 10^{(-8)} x^4 + 3.955832 * 10^{(-5)} x^3 - 0.0217471 x^2 + 5.406916 x - 520.1$$



La interpolación polinomial consiste en determinar el polinomio único de grado n que ajuste a (n + 1) puntos

Este polinomio, entonces, proporciona una fórmula para calcular valores intermedios

INTERPOLACIÓN: MÉTODO DE NEWTON

Recuerde que la fórmula general para un polinomio de grado n es:

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n$$

Aunque hay uno y sólo un polinomio de grado n que se ajusta a n + 1 puntos, existen varias formas matemáticas en las cuales puede expresarse este polinomio:

$$f(x) = -160 + 1.25(x-100) - 0.00471(x-100)(x-200) + [1.276666*10^{(-5)}](x-100)(x-200)(x-300) - [2.67916667*10^{(-8)}](x-100)(x-200)(x-300)(x-400)$$

$$f(x) = -2.67916667*10^{(-8)} x^4 + 3.955832*10^{(-5)} x^3 - 0.0217471x^2 + 5.406916x - 520.1$$

En esta sección del curso describiremos dos alternativas:

Polinomios de Newton y Polinomios de Lagrange

INTERPOLACIÓN: MÉTODO DE NEWTON

Forma de Newton del polinomio interpolante: Dados $n+1$ puntos $(x_0, y_0), (x_1, y_1), \ldots, (x_n, y_n)$ con $x_0, x_1, \ldots, x_n$ números distintos y $y_k = f(x_k)$, $k = 0,1,\ldots,n$ para alguna función f definida en algún intervalo [a,b] que contiene a los nodos distintos $x_0, x_1, \ldots, x_n$. El polinomio $p_n(x)$ de grado menor o igual que **n** que interpola a f en los datos dados, puede expresarse en la forma

$$p_n(x) = b_0 + b_1(x - x_0) + b_2(x - x_0)(x - x_1) + \ \ldots \ + b_n(x - x_0)(x - x_1)\ldots(x - x_{n-1})$$

para ciertas constantes $b_0, b_1, \ldots, b_n$.

Cómo determinar los coeficientes $b_0, b_1, \ldots, b_n$?

INTERPOLACIÓN: MÉTODO DE NEWTON

Puesto que $p_n(x_k) = y_k = f(x_k)$, $k = 0, 1, \ldots, n$, entonces

$p_n(x_0) = b_0 = f(x_0)$, así que

$$b_0 = f(x_0)$$

$p_n(x_1) = b_0 + b_1(x_1 - x_0) = f(x_1)$, así que

$$b_1 = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}$$

$p_n(x_2) = b_0 + b_1(x_2 - x_0) + b_2(x_2 - x_0)(x_2 - x_1) = f(x_2)$, así que

INTERPOLACIÓN: MÉTODO DE NEWTON

$$b_2 = \frac{f(x_2) - f(x_0) - \dfrac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}(x_2 - x_0)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)}$$

y después de realizar algunas manipulaciones algebraicas se tiene que

$$b_2 = \frac{\dfrac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} - \dfrac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}}{x_2 - x_0}$$

Los otros coeficientes $b_3, b_4, \ldots, b_n$ se pueden obtener consecutivamente, siguiendo el método anterior.

INTERPOLACIÓN: MÉTODO DE NEWTON

Forma general de los polinomios de interpolación de Newton

(Ampliación sección 18.1.3 Libro de Chapra edición sexta. Páginas 508-509)

Para un polinomio de grado **n** se requieren (n + 1) puntos:

$$[x_0, f(x_0)], [x_1, f(x_1)], \ldots, [x_n, f(x_n)]$$

Usamos estos datos y las siguientes ecuaciones para evaluar los coeficientes:

$$b_0 = f(x_0) \qquad b_1 = f[x_1, x_0] \qquad b_2 = f[x_2, x_1, x_0] \quad \cdots \quad b_n = f[x_n, x_{n-1}, \cdots, x_1, x_0]$$

Grado 1

$\boxed{f[x_1, x_0]}$ $\boxed{\dfrac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}}$

b_1

INTERPOLACIÓN: MÉTODO DE NEWTON

Forma general de los polinomios de interpolación de Newton

(Ampliación sección 18.1.3 Libro de Chapra edición sexta. Páginas 508-509)

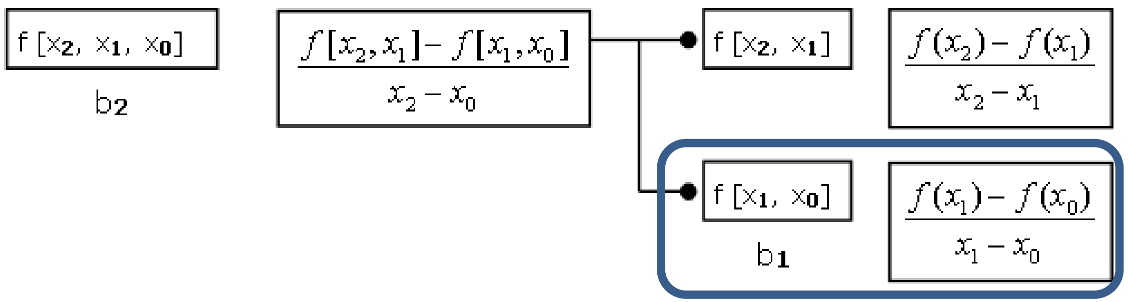
Para un polinomio de grado **n** se requieren (n + 1) puntos:

$$[x_0, f(x_0)], [x_1, f(x_1)], \ldots, [x_n, f(x_n)]$$

Usamos estos datos y las siguientes ecuaciones para evaluar los coeficientes:

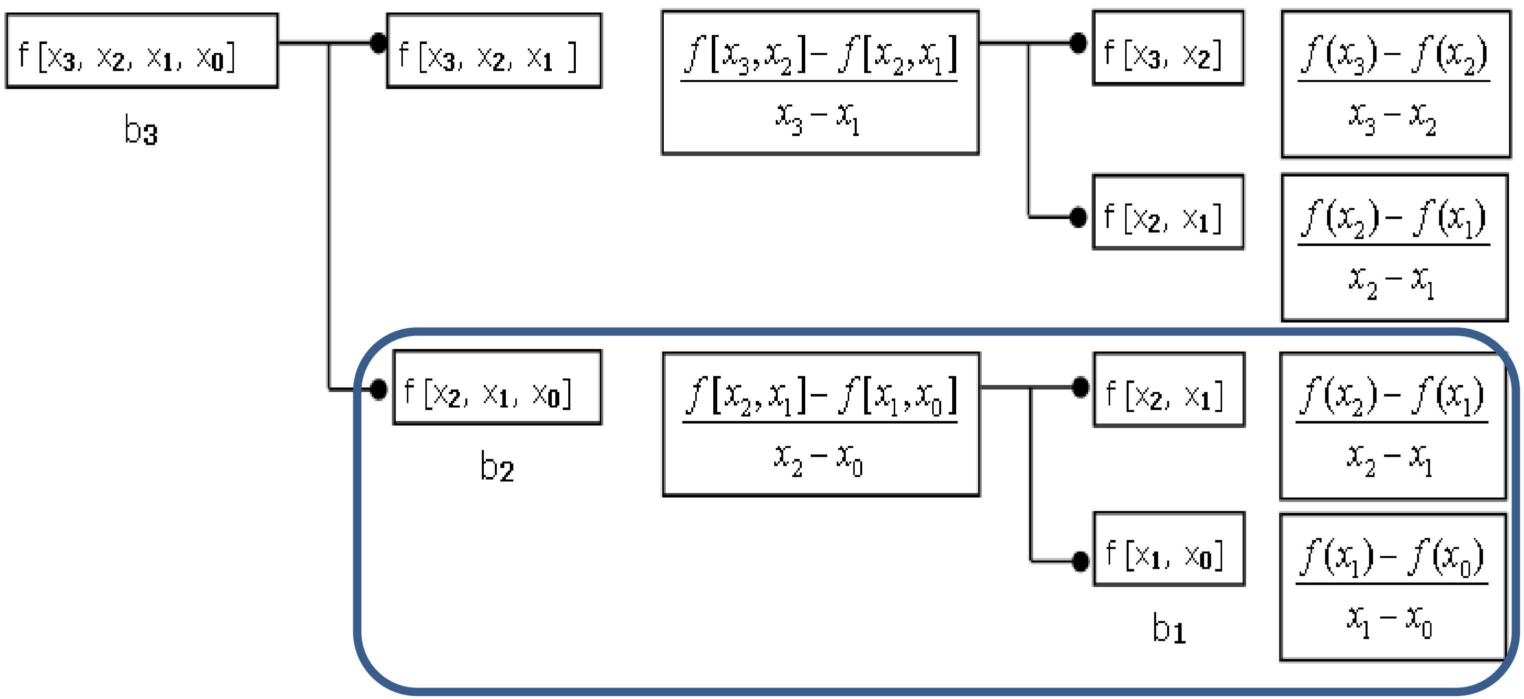
$$b_0 = f(x_0) \qquad b_1 = f[x_1, x_0] \qquad b_2 = f[x_2, x_1, x_0] \quad \cdots \quad b_n = f[x_n, x_{n-1}, \cdots, x_1, x_0]$$

Grado 2



INTERPOLACIÓN: MÉTODO DE NEWTON

Grado 3



INTERPOLACIÓN: MÉTODO DE NEWTON

Grado 4

- $f[x_4, x_3, x_2, x_1, x_0]$ — b4
  - $f[x_4, x_3, x_2, x_1]$
    - $f[x_4, x_3, x_2]$ — $\dfrac{f[x_4,x_3]-f[x_3,x_2]}{x_4-x_2}$
      - $f[x_4, x_3]$ — $\dfrac{f(x_4)-f(x_3)}{x_4-x_3}$
      - $f[x_3, x_2]$ — $\dfrac{f(x_3)-f(x_2)}{x_3-x_2}$
    - $f[x_3, x_2, x_1]$ — $\dfrac{f[x_3,x_2]-f[x_2,x_1]}{x_3-x_1}$
      - $f[x_3, x_2]$ — $\dfrac{f(x_3)-f(x_2)}{x_3-x_2}$
      - $f[x_2, x_1]$ — $\dfrac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$
  - $f[x_3, x_2, x_1, x_0]$ — b3
    - $f[x_3, x_2, x_1]$ — $\dfrac{f[x_3,x_2]-f[x_2,x_1]}{x_3-x_1}$
      - $f[x_3, x_2]$ — $\dfrac{f(x_3)-f(x_2)}{x_3-x_2}$
      - $f[x_2, x_1]$ — $\dfrac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$
    - $f[x_2, x_1, x_0]$ — b2 — $\dfrac{f[x_2,x_1]-f[x_1,x_0]}{x_2-x_0}$
      - $f[x_2, x_1]$ — $\dfrac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$
      - $f[x_1, x_0]$ — b1 — $\dfrac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0}$

----FIN DEL DOCUMENTO---