



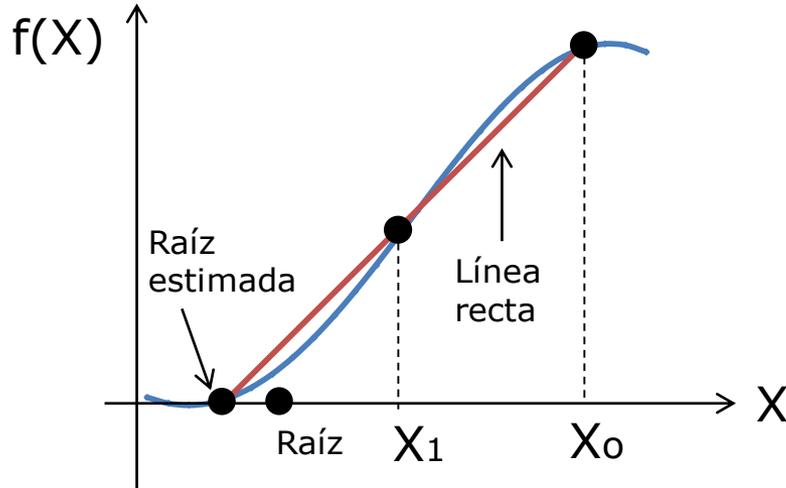
ANÁLISIS NUMÉRICO

Mag. Carlos Alberto Ardila Albarracín

BLOQUE 1. RAÍCES DE ECUACIONES DE UNA VARIABLE
1.6. MÉTODO DE MÜLLER

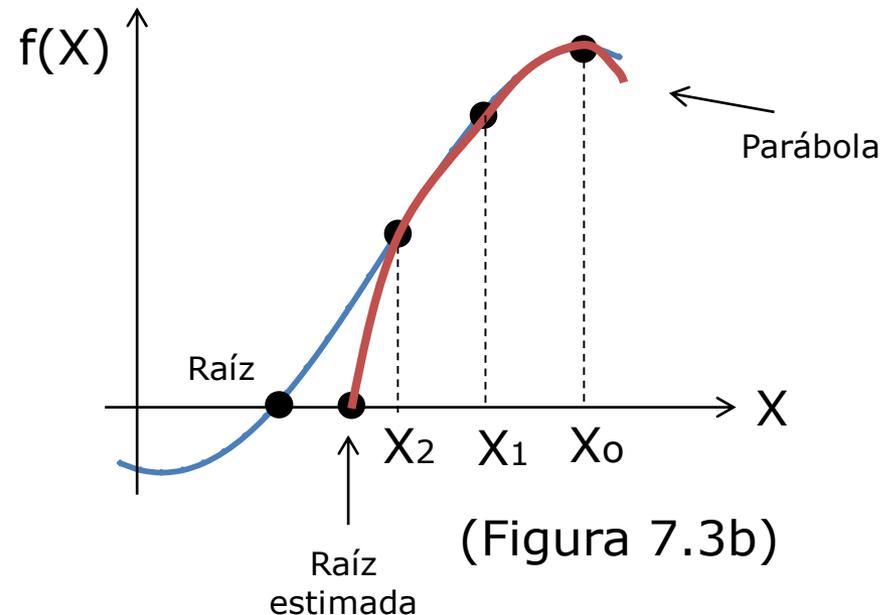
MÉTODO DE MÜLLER

Recuerden que el método de la secante obtiene raíces estimando una proyección de una línea recta en el eje x a través de dos valores de la función (Figura 7.3a)



(Figura 7.3a)

El método de Müller toma un punto de vista similar, pero proyecta una parábola (polinomio de grado 2) a través de 3 puntos (Figura 7.3b)



(Figura 7.3b)

MÉTODO DE MÜLLER

El método consiste en obtener los coeficientes a partir de esos tres puntos de la parábola que "cortan" la función.

Estos coeficientes pueden ser sustituidos en la fórmula cuadrática para obtener el nodo donde la parábola intercepta al eje x; es decir, la raíz estimada.

$$\mathbf{f_2(x) = a (x - x_2)^2 + b(x - x_2) + c} \quad (7.17)$$

MÉTODO DE MÜLLER

Buscamos esta parábola para intersectar los tres puntos

$$[X_0, f(X_0)] , [X_1, f(X_1)] \quad \text{y} \quad [X_2, f(X_2)]$$

Los coeficientes de la ecuación (7.17) pueden evaluarse al sustituir cada uno de esos tres nodos para dar lo siguiente

$$f(x_0) = a ((x_0) - x_2)^2 + b(x_0 - x_2) + c \quad (7.18)$$

$$f(x_1) = a ((x_1) - x_2)^2 + b(x_1 - x_2) + c \quad (7.19)$$

$$f(x_2) = a ((x_2) - x_2)^2 + b(x_2 - x_2) + c \quad (7.20)$$

MÉTODO DE MÜLLER

Obsérvese que se ha eliminado el subíndice "2" de la función por consistencia (para la manipulación algebraica).

Debido a que se tiene tres ecuaciones pueden ser resueltas para tres incógnitas que son a , b y c .

Ya que dos términos de la ecuación (7.20) son cero, puede resolverse inmediatamente para $c = f(x_2)$

Entonces, el coeficiente c es justamente igual al valor de la función evaluada con el tercer valor, x_2

MÉTODO DE MÜLLER

Este resultado puede sustituirse en las ecuaciones

(7.18) y (7.19)

para dar dos ecuaciones con dos incógnitas

$$f(x_0) - f(x_2) = a((x_0) - x_2)^2 + b(x_0 - x_2) \quad (7.21)$$

$$f(x_1) - f(x_2) = a((x_1) - x_2)^2 + b(x_1 - x_2) \quad (7.22)$$

MÉTODO DE MÜLLER

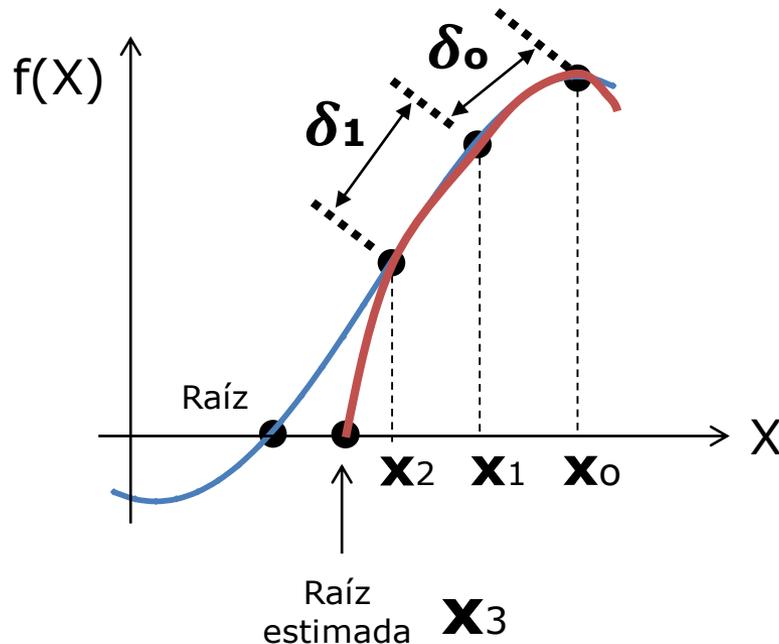
Hay que estimar el "paso" o diferencia entre los nodos \mathbf{x}_0 , \mathbf{x}_1 y \mathbf{x}_2 :

De \mathbf{x}_0 a \mathbf{x}_1 : $\mathbf{h}_0 = (\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_0)$ De \mathbf{x}_1 a \mathbf{x}_2 : $\mathbf{h}_1 = (\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1)$

Necesarios para estimar las "pendientes" (aproximación a la derivada)

"Pendiente 1": entre los puntos $(\mathbf{x}_0, f(\mathbf{x}_0))$ y $(\mathbf{x}_1, f(\mathbf{x}_1)) \rightarrow \delta_0$

"Pendiente 2": entre los puntos $(\mathbf{x}_1, f(\mathbf{x}_1))$ y $(\mathbf{x}_2, f(\mathbf{x}_2)) \rightarrow \delta_1$



$$\delta_0 = \frac{f(\mathbf{x}_1) - f(\mathbf{x}_0)}{h_0}$$

$$\delta_1 = \frac{f(\mathbf{x}_2) - f(\mathbf{x}_1)}{h_1}$$

(7.23)

MÉTODO DE MÜLLER

Éstas pueden sustituirse en las ecuaciones (7.21) y (7.22) para dar

$$(h_0 + h_1)b - (h_0 + h_1)^2 a = h_0 \delta_0 + h_1 \delta_1$$

$$h_1 b - (h_1)^2 a = h_1 \delta_1$$

La cual puede resolverse para a y b .
El resultado puede resumirse como

$$a = \frac{\delta_1 - \delta_0}{h_1 + h_0}$$

(7.24)

$$b = ah_1 + \delta_1$$

(7.25)

$$c = f(x_2)$$

(7.26)

MÉTODO DE MÜLLER

Para encontrar la raíz se puede aplicar la fórmula cuadrática a la ecuación (7.17). Sin embargo, debido al error de redondeo potencial, antes que usar la fórmula convencional, se usará una formulación alternativa

$$\mathbf{x_3 - x_2 = \frac{-2c}{b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}} \quad (7.27a)$$

O despejando la incógnita $\mathbf{x_3}$ del lado izquierdo del signo igual

$$\mathbf{x_3 = x_2 + \frac{-2c}{b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}} \quad (7.27b)$$

MÉTODO DE MÜLLER

Además, la ecuación (7.27a) proporciona una forma directa de determinación del error aproximado.

Debido a que el lado izquierdo representa la diferencia entre la raíz actual (**x_3**) y la raíz estimada anterior (**x_2**), el error puede calcularse como

$$\text{Erp} = \left| \frac{x_3 - x_2}{x_3} \right| * 100\%$$

**Una vez calculado el Erp,
el proceso se repite
hasta superar la Tolerancia predeterminada**

MÉTODO DE MÜLLER

Para encontrar una solución de $f(x) = 0$ dadas tres aproximaciones \mathbf{x}_0 , \mathbf{x}_1 y \mathbf{x}_2 .

Entradas: aproximaciones iniciales \mathbf{x}_0 , \mathbf{x}_1 y \mathbf{x}_2 , tolerancia **TOL**, número máximo de iteraciones **N**

Salida: Solución aproximada **p** ó mensaje de fracaso.

Paso 1: tomar $\mathbf{h}_1 = \mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_0$, $\mathbf{h}_2 = \mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1$
 $\delta_1 = [f(\mathbf{x}_1) - f(\mathbf{x}_0)] / \mathbf{h}_1$ $\delta_2 = [f(\mathbf{x}_2) - f(\mathbf{x}_1)] / \mathbf{h}_2$
 $a = (\delta_2 - \delta_1) / (\mathbf{h}_2 + \mathbf{h}_1)$ $i = 2$

Paso 2: Mientras ($i \leq N$) seguir pasos 3 a 7:

Paso 3: tomar $b = \delta_2 + (\mathbf{h}_2 * a)$ $D = \sqrt{b^2 - (4 * f(\mathbf{x}_2) * a)}$

Paso 4: si $|b - D| < |b + D|$ entonces tomar $E = b + D$, sino tomar $E = b - D$

Paso 5: tomar $h = (-2 * f(\mathbf{x}_2)) / E$ $\mathbf{p} = \mathbf{x}_2 + h$

Paso 6: $E_r = (p - \mathbf{x}_2) / p$
 si ($E_r < \text{TOL}$) entonces mostrar **p** y **PARAR**

Paso 7: tomar (preparar para la siguiente iteración):

$\mathbf{x}_0 = \mathbf{x}_1$ $\mathbf{x}_1 = \mathbf{x}_2$ $\mathbf{x}_2 = \mathbf{p}$
 $\mathbf{h}_1 = \mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_0$ $\mathbf{h}_2 = \mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1$
 $\delta_1 = [f(\mathbf{x}_1) - f(\mathbf{x}_0)] / \mathbf{h}_1$ $\delta_2 = [f(\mathbf{x}_2) - f(\mathbf{x}_1)] / \mathbf{h}_2$
 $a = (\delta_2 - \delta_1) / (\mathbf{h}_2 + \mathbf{h}_1)$ $i = i + 1$

Paso 8: SALIDA. El método ha fracasado después de N iteraciones y **PARAR**