ANÁLISIS NUMÉRICO

Mag. Carlos Alberto Ardila Albarracín

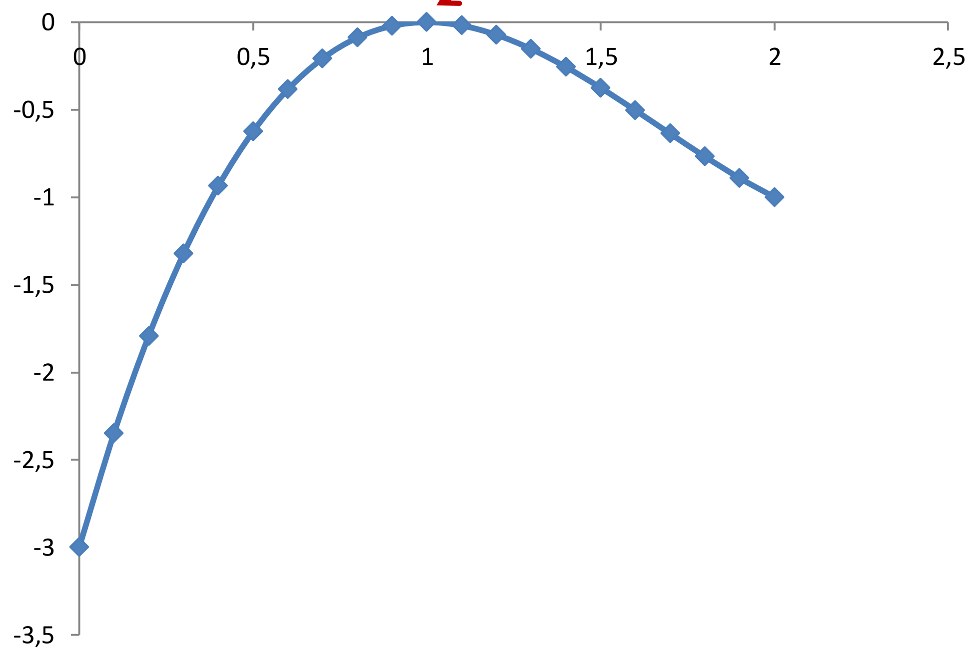
BLOQUE 1. RAÍCES DE ECUACIONES DE UNA VARIABLE

1.5. RAÍCES MÚLTIPLES DE UNA FUNCIÓN

RAÍCES MÚLTIPLES

A veces, tendremos que enfrentarnos al hecho de la existencia de raíces (o ceros) múltiples.

Una raíz múltiple corresponde a un punto donde una función es tangencial al eje x.



Por ejemplo, existe una raíz de multiplicidad DOS (2) en :

$$f(x) = (x-3)\ (x-1)\ (x-1)$$

o multiplicando términos,

$$f(x) = x^3 - 5x^2 + 7x - 3$$

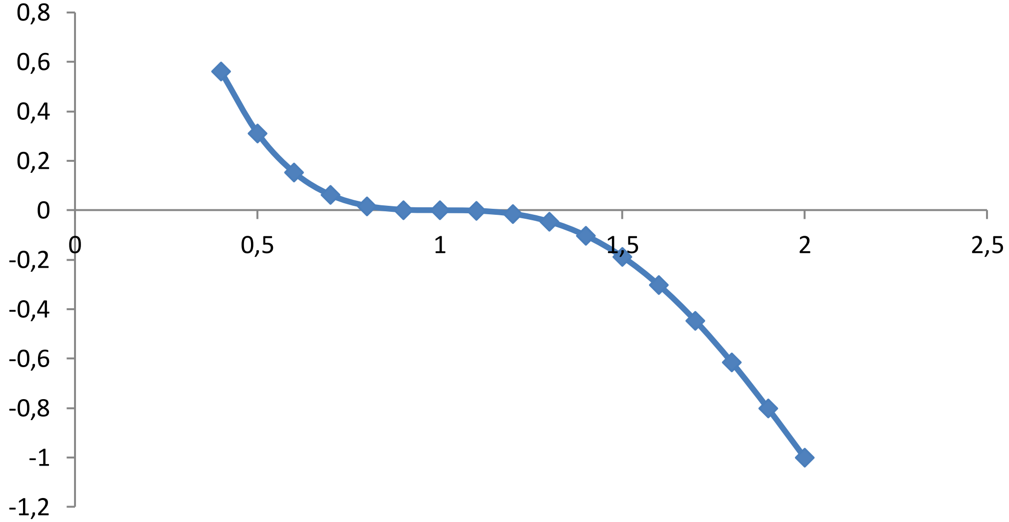
La ecuación tiene una raíz doble (o de multiplicidad 2) porque un mismo valor de x (en este caso $x = 1$) hace que DOS términos de la ecuación sean iguales a cero.

RAÍCES MÚLTIPLES

Por ejemplo, existe una raíz de multiplicidad TRES (3) en :

$$f(x) = (x - 3)\,(x - 1)\,(x - 1)\,(x - 1)$$

o multiplicando términos, $f(x) = x^4 - 6x^3 + 12x^2 - 10x + 3$



La ecuación tiene una raíz triple (o de multiplicidad 3) porque un mismo valor de x (en este caso x = 1) hace que TRES términos de la ecuación sean iguales a cero.

Note que en la gráfica se indica que la función es tangente al eje en la raíz, pero a diferencia del ejemplo anterior, SÍ CRUZA EL EJE.

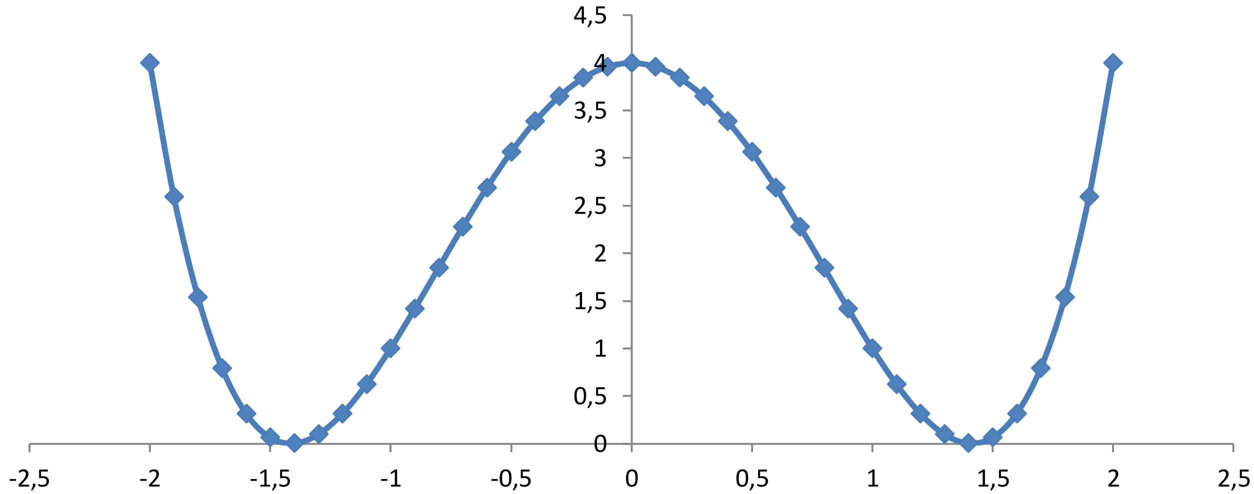
En general, la multiplicidad IMPAR de raíces CRUZA el eje, mientras que la multiplicidad PAR NO LO CRUZA.

RAÍCES MÚLTIPLES

Por ejemplo, existe una raíz de multiplicidad DOS (2) en :

$$f(x) = (x^2 - 2)\,(x^2 - 2)$$

o multiplicando términos, $f(x) = x^4 - 4x^2 + 4$



La ecuación tiene una raíz doble (o de multiplicidad 2) porque un valor de x (en este caso $+\sqrt{2}$ ó también $-\sqrt{2}$) hace que los DOS términos de la ecuación sean iguales a cero.

RAÍCES MÚLTIPLES

INSISTO: LA MULTIPLICIDAD SE REFIERE A LA CANTIDAD DE TÉRMINOS QUE SE ANULAN EN LA ECUACIÓN.

NADA TIENE QUE VER EL HECHO QUE HAYA 2 VALORES QUE LOGREN ESE EFECTO.

Recuerden el ejemplo de la diapositiva 3,
en donde la ecuación tenía multiplicidad TRES
(tenía 3 términos que se anulaban),

pero solo había UN(1) valor que lograba ese efecto.

RAÍCES MÚLTIPLES

¿Cómo identificarlos? El siguiente teorema da una manera fácil:

Una función f tiene un cero (o raíz) simple en p (p pertenece al intervalo [a,b])

si y solo si $f(p) = 0$, pero $f^{(1)}(p) \neq 0$.

Una función f tiene un cero de multiplicidad m (p pertenece al intervalo [a,b])

$$0 = f(p) = f^{(1)}(p) = f^{(2)}(p) = \ldots = f^{(m-1)}(p) \; , \; \text{pero } f^{(m)}(p) \neq 0.$$

RAÍCES MÚLTIPLES

Revisemos las funciones de los ejemplos para encontrar el valor de la multiplicidad, que denotaremos como m:

$f(x) = x^3 – 5x^2 + 7x – 3$

$f^{(1)}(x) = 3x^2 – 10x + 7$ $\qquad f^{(1)}(1) = 3(1)^2 – 10(1) + 7 = 0$

$f^{(2)}(x) = 6x – 10$ $\qquad f^{(2)}(1) = 6(1) – 10 = -4$

No da cero en la segunda derivada, por tanto m=2

$f(x) = x^4 – 6x^3 + 12x^2 - 10x + 3$

$f^{(1)}(x) = 4x^3 – 18x^2 + 24x -10$ $\qquad f^{(1)}(1) = 4(1)^3 – 18(1)^2 + 24(1) -10 = 0$

$f^{(2)}(x) = 12x^2 – 36x + 24$ $\qquad f^{(2)}(1) = 12(1)^2 – 36(1) + 24 = 0$

$f^{(3)}(x) = 24x – 36$ $\qquad f^{(3)}(1) = 24(1) – 36 = -12$

No da cero en la tercera derivada, por tanto m=3

RAÍCES MÚLTIPLES

$f(x) = x^4 - 4x^2 + 4$

$f^{(1)}(x) = 4x^3 - 8x$

$f^{(2)}(x) = 12x^2 - 8$

$f^{(1)}(\sqrt{2}) = 4(\sqrt{2})^3 - 8(\sqrt{2}) = 0$

$f^{(2)}(\sqrt{2}) = 12(\sqrt{2})^2 - 8 = 24 - 8 = 16$

No da cero en la segunda derivada, por tanto m=2

Bueno…. ¿Y qué pasa con estas raíces múltiples?

Estas raíces de multiplicidad mayor a 1

degradan el rendimiento
del algoritmo de Newton-Raphson

RAÍCES MÚLTIPLES

Para "atacar" ese problema, se puede usar la fórmula de Newton generalizada para raíces múltiples.

$$g(x) = x - \frac{f(x)\, f'(x)}{[f'(x)]^2 - [f(x)\, f''(x)]}$$

RAÍCES MÚLTIPLES

Si g cumple con las condiciones de continuidad requeridas, la iteración funcional aplicada a g tendrá convergencia cuadrática (ganando 2 cifras por iteración) independientemente de la multiplicidad de la raíz.

Teóricamente, las únicas desventajas de este método son los cálculos adicionales de $f''(x)$ y el hecho de que el procedimiento es más laborioso para calcular las iteraciones.

En la práctica, sin embargo, la presencia de una raíz múltiple puede causar serios problemas de redondeo.

RAÍCES MÚLTIPLES

Anteriormente, habíamos trabajado $f(x) = x^3 + 4x^2 - 10 = 0$

Y la raíz obtenida fue de 1.365230013

Con Newton :

$$p_n = p_{n-1} - \frac{p_{n-1}^3 + 4\, p_{n-1}^2 - 10}{3\, p_{n-1}^2 + 8\, p_{n-1}}$$

Con Newton generalizado:

$$p_n = p_{n-1} - \frac{(p_{n-1}^3 + 4\, p_{n-1}^2 - 10)\,(3\, p_{n-1}^2 + 8\, p_{n-1})}{(3\, p_{n-1}^2 + 8\, p_{n-1})^2 - (p_{n-1}^3 + 4\, p_{n-1}^2 - 10)\,(6\, p_{n-1} + 8)}$$

Con po = 1.5, las primeras iteraciones para
(i)[Newton normal] y (ii)[Newton generalizado]
son las siguientes:

	(i)	(ii)
p_1	1.373333333	1.356898976
p_2	1.365262015	1.365195849
p_3	1.365230014	1.365230013
p_4	1.365230013	1.365230013

RAÍCES MÚLTIPLES

Recordemos la función que vimos al principio $f(x) = x^4 - 4x^2 + 4 = 0$

Y la raíz obtenida fue de ± 1.414213562 ($\pm\sqrt{2}$)

Comprobamos que tiene raíces múltiples y tendríamos que usar el método de Newton generalizado.

Con po = 1.5, las tres primeras iteraciones para
(i)[Newton normal] y (ii)[Newton generalizado]
son las siguientes:

	(i)	(ii)
p_1	1.458333333	1.411764706
p_2	1.436607143	1.414211438
p_3	1.425497619	1.414213562

La solución real correcta en 10^{-10} es la que aparece para p3 en (ii).