ANÁLISIS NUMÉRICO

Mag. Carlos Alberto Ardila Albarracín

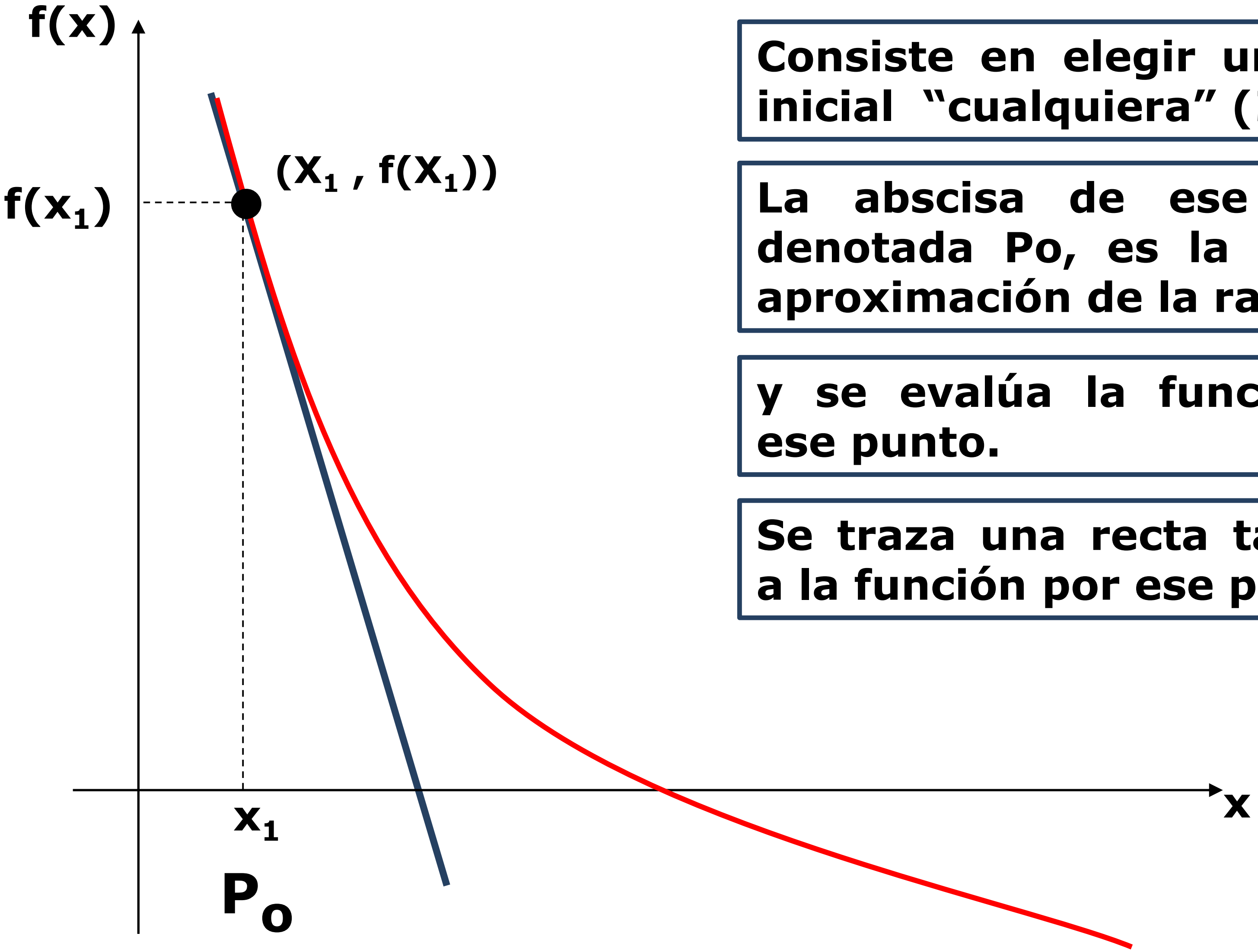
BLOQUE 1. RAÍCES DE ECUACIONES DE UNA VARIABLE

1.3. MÉTODO DE NEWTON – RAPHSON

1.4. MÉTODO DE LA SECANTE

1.5. RAÍCES MÚLTIPLES

MÉTODO DE NEWTON - RAPHSON



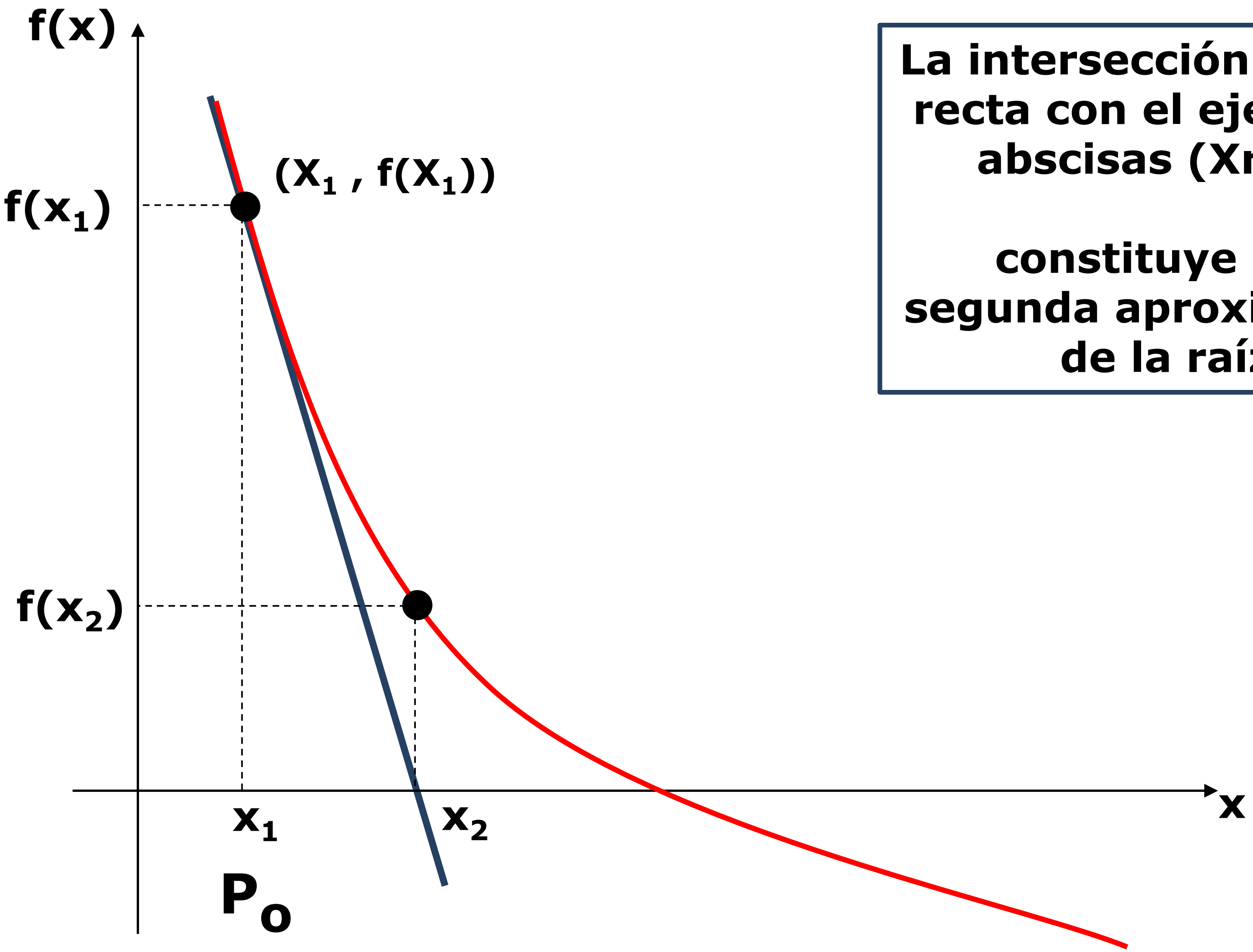
Consiste en elegir un punto inicial "cualquiera" (¡ojo!).

La abscisa de ese punto, denotada Po, es la primera aproximación de la raíz

y se evalúa la función por ese punto.

Se traza una recta tangente a la función por ese punto.

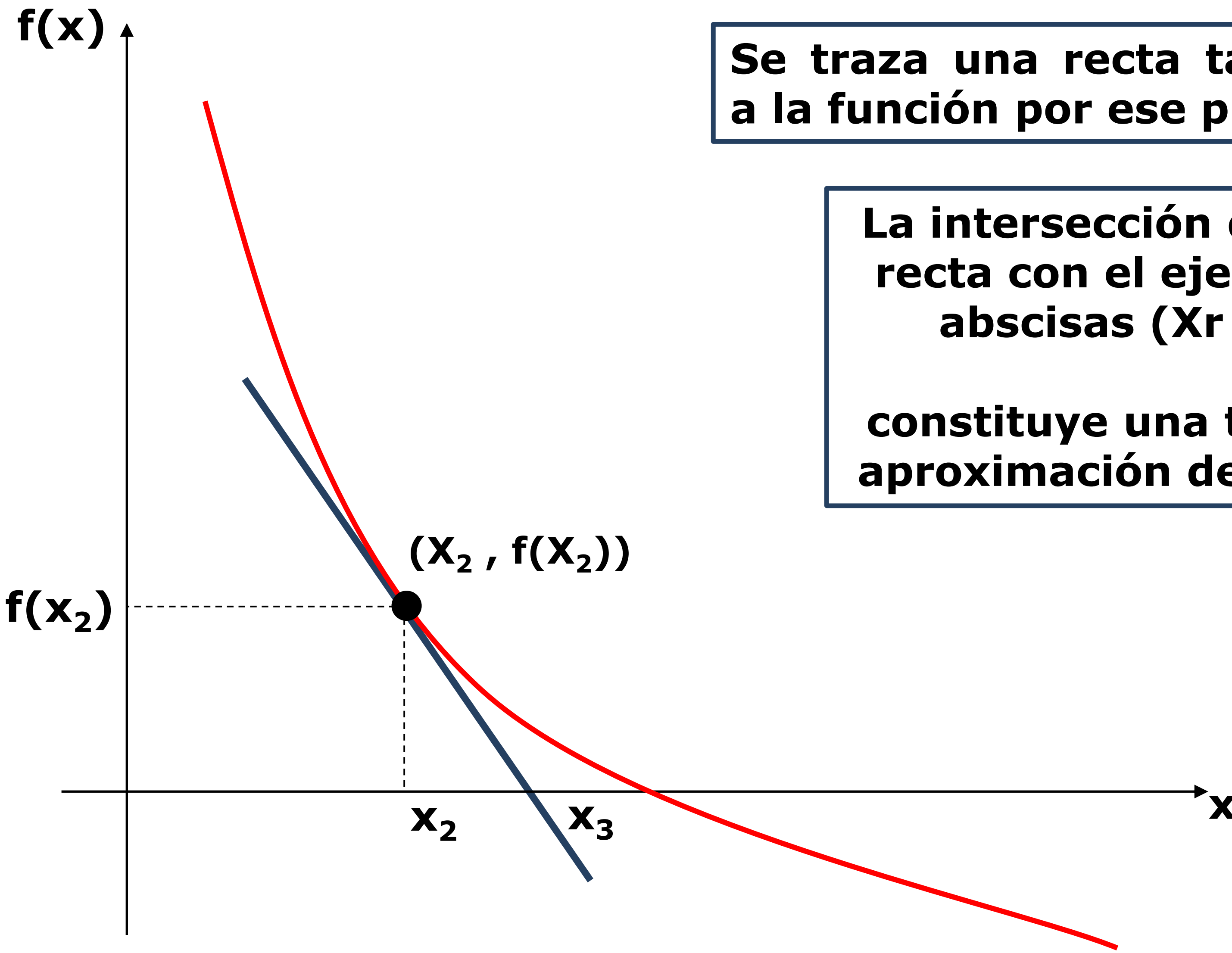
MÉTODO DE NEWTON - RAPHSON



La intersección de esta recta con el eje de las abscisas (Xr , 0)

constituye una segunda aproximación de la raíz

MÉTODO DE NEWTON - RAPHSON



Se traza una recta tangente a la función por ese punto.

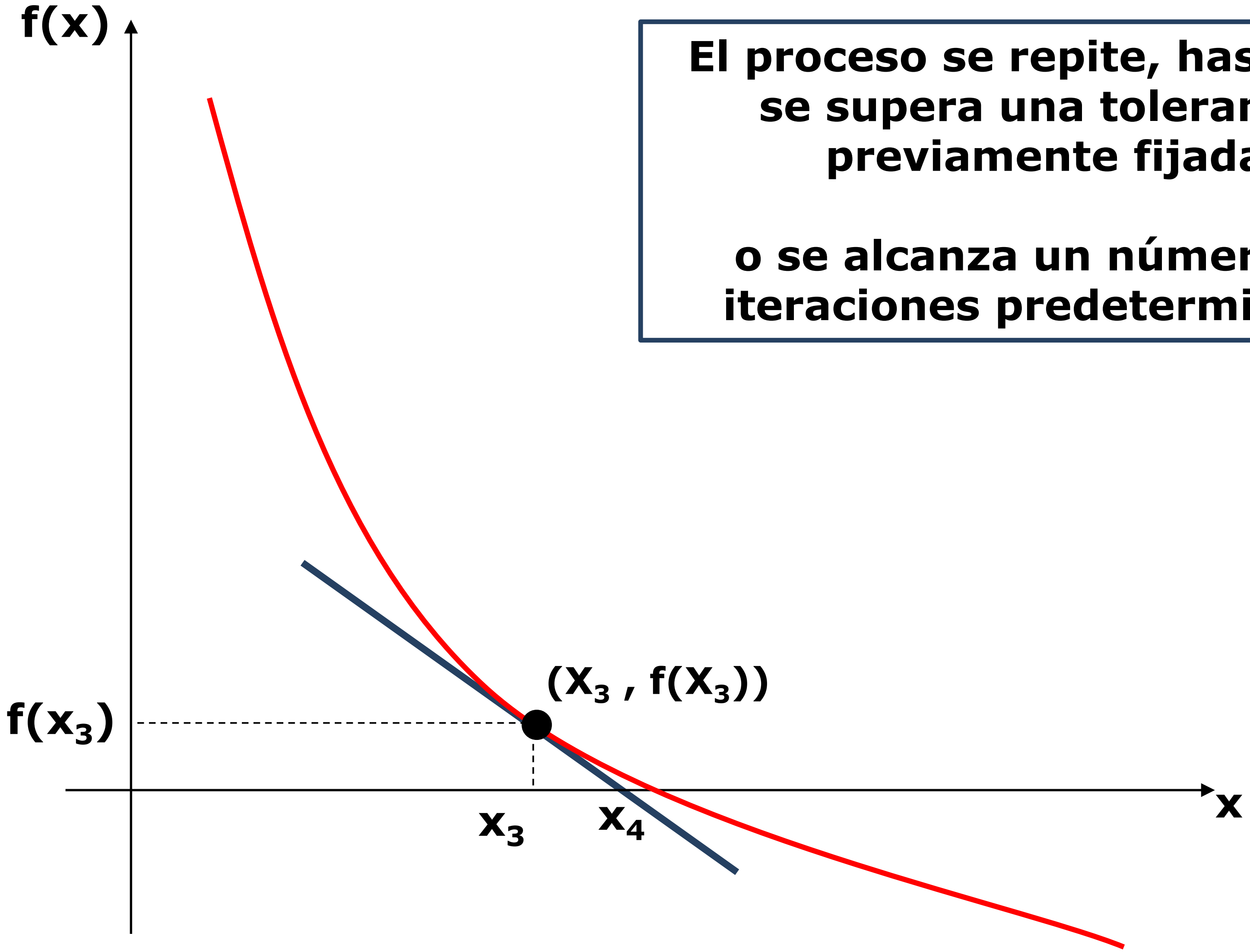
La intersección de esta recta con el eje de las abscisas (Xr , 0)

constituye una tercera aproximación de la raíz

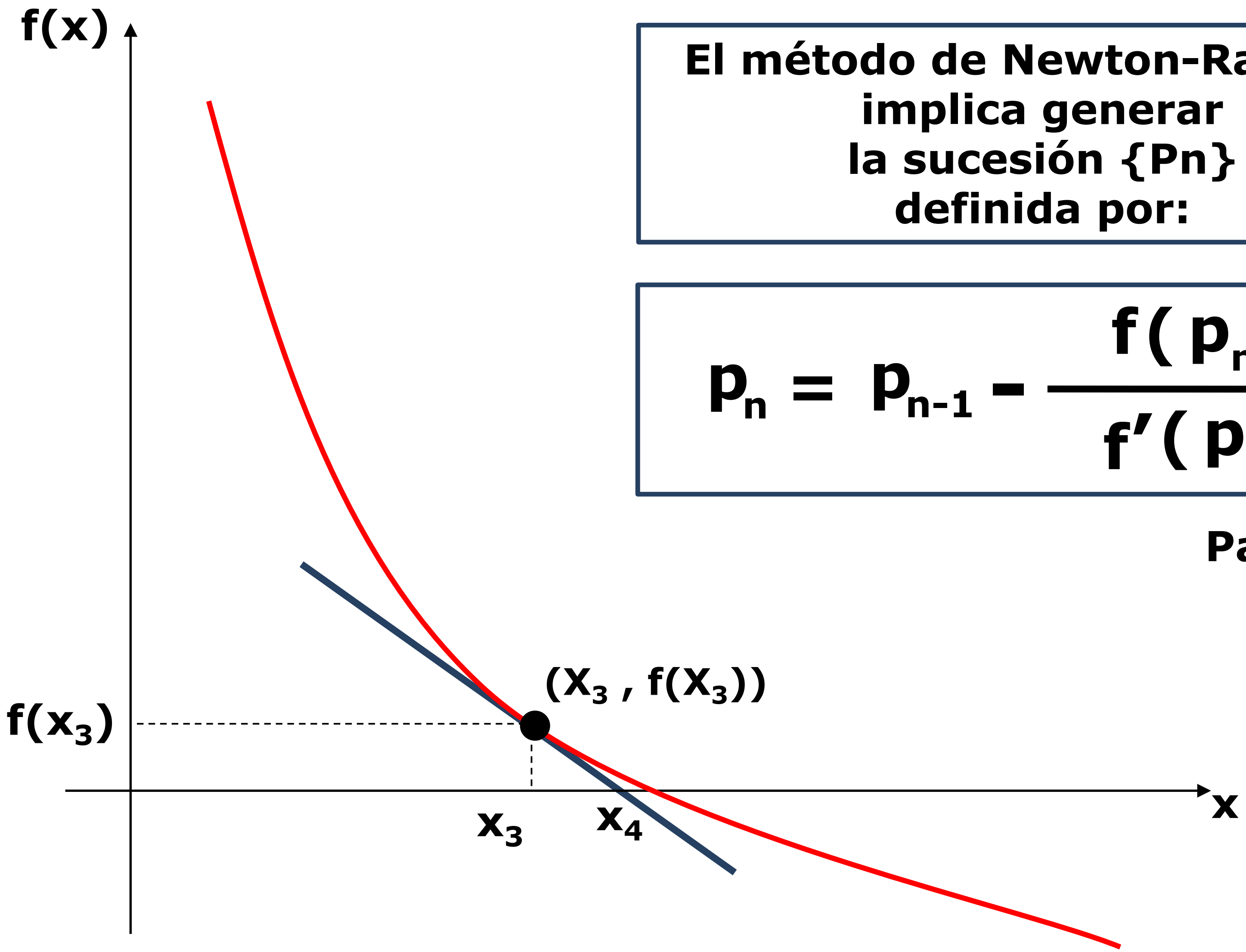
MÉTODO DE NEWTON - RAPHSON

El proceso se repite, hasta que se supera una tolerancia previamente fijada

o se alcanza un número de iteraciones predeterminado



MÉTODO DE NEWTON - RAPHSON



El método de Newton-Raphson implica generar la sucesión {Pn} definida por:

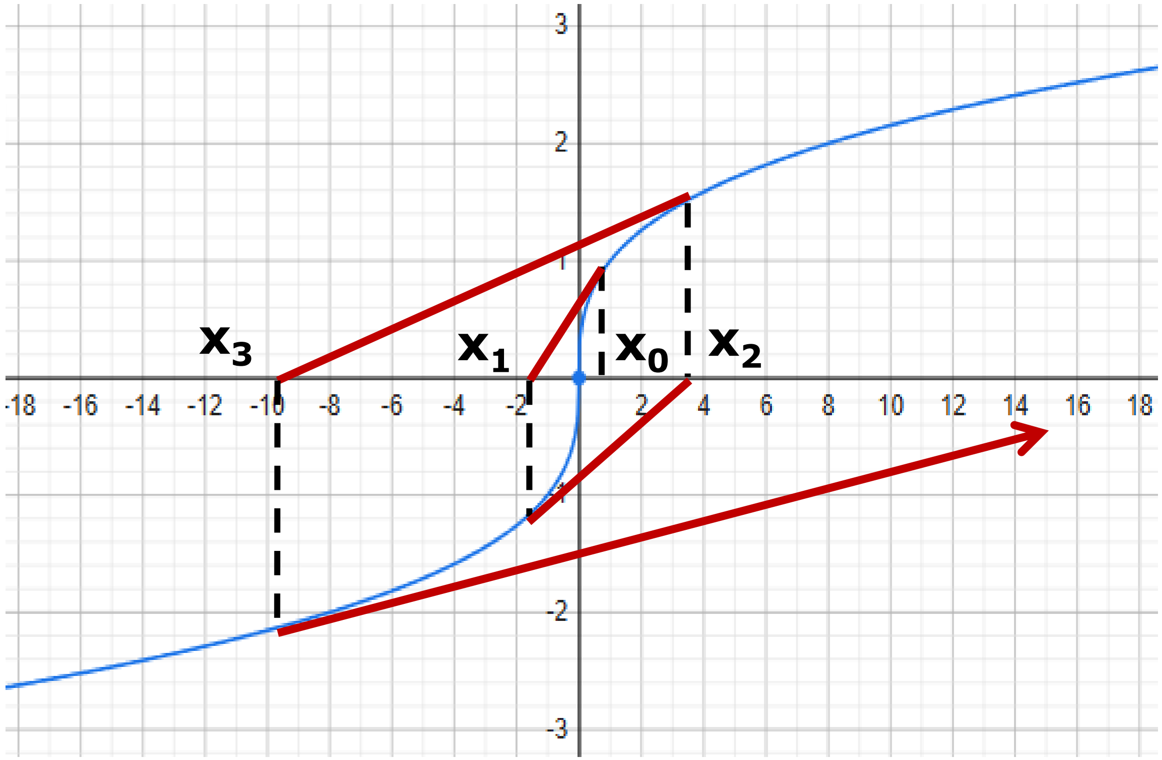
$$p_n = p_{n-1} - \frac{f(p_{n-1})}{f'(p_{n-1})}$$

Para n ≥ 1

MÉTODO DE NEWTON - RAPHSON

Aunque el método trabaja bien, no existe garantía de convergencia

Si en las proximidades de la raíz existe un punto de inflexión, las iteraciones divergen progresivamente de la raíz.



MÉTODO DE NEWTON - RAPHSON

==

Para encontrar una solución de f(x) = 0 dada una aproximación inicial **Po**

Entradas: Aproximación inicial Po, tolerancia **TOL**, número máximo de iteraciones **N**

Salida: Solución aproximada **p** ó mensaje de fracaso

Paso 1: tomar i = 1. (La variable **i** es la contadora de iteraciones).

Paso 2: Mientras (i<=N) seguir pasos 3 a 7:

Paso 3: Tomar p = po **-** (f(po) / f'(po)) //Para calcular la nueva raíz

Paso 4: error relativo = **|** (p - po) / p **|**

Paso 5: si (error relativo < TOL) entonces mostrar **p** y **PARAR**

Paso 6: tomar i = i + 1

Paso 7: tomar po = p //redefinición de po

Paso 8: SALIDA. El método ha fracasado después de N iteraciones y **PARAR**

==

MÉTODO DE NEWTON - RAPHSON

Algunas consideraciones:

Note que el método de Newton-Raphson no trabaja con intervalos donde nos asegure que encontraremos la raíz, y de hecho no tenemos ninguna garantía de que nos aproximaremos a dicha raíz.

Desde luego, existen ejemplos donde este método no converge a la raíz, en cuyo caso se dice que el método diverge.

Sin embargo, en los casos donde converge a la raíz lo hace con una rapidez mucho mayor que otros métodos.

En el caso de que $f'(Po) = 0$, el método no se puede aplicar.

De hecho, geométricamente esto significa que la recta tangente es horizontal y por lo tanto no intersecta al eje x en ningún punto.

ALTERNATIVA: MÉTODO DE LA SECANTE

Este método se basa en la fórmula de Newton-Raphson,

pero evita el cálculo de la derivada

usando la siguiente aproximación

$$\boxed{f'(X_i) \approx \frac{f(X_{i-1}) - f(X_i)}{X_{i-1} - X_i}}$$

MÉTODO DE LA SECANTE

Sustituyendo en la fórmula de Newton-Raphson, obtenemos:

$$x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)} \approx x_i - \frac{f(x_i)}{\dfrac{f(X_{i-1}) - f(X_i)}{X_{i-1} - X_i}}$$

$$\therefore \quad x_{i+1} \approx x_i - \frac{f(x_i)\,(X_{i-1} - X_i)}{f(X_{i-1}) - f(X_i)}$$

MÉTODO DE LA SECANTE

Esa es la fórmula del método de la secante.
Nótese que para poder calcular el valor de X_{i+1} necesitamos conocer los dos valores anteriores X_i y X_{i-1}.

Obsérvese también, el gran parecido con la fórmula del método de la regla falsa.

¿Diferencia? regla falsa trabaja sobre intervalos cerrados y el método de la secante es un proceso iterativo.

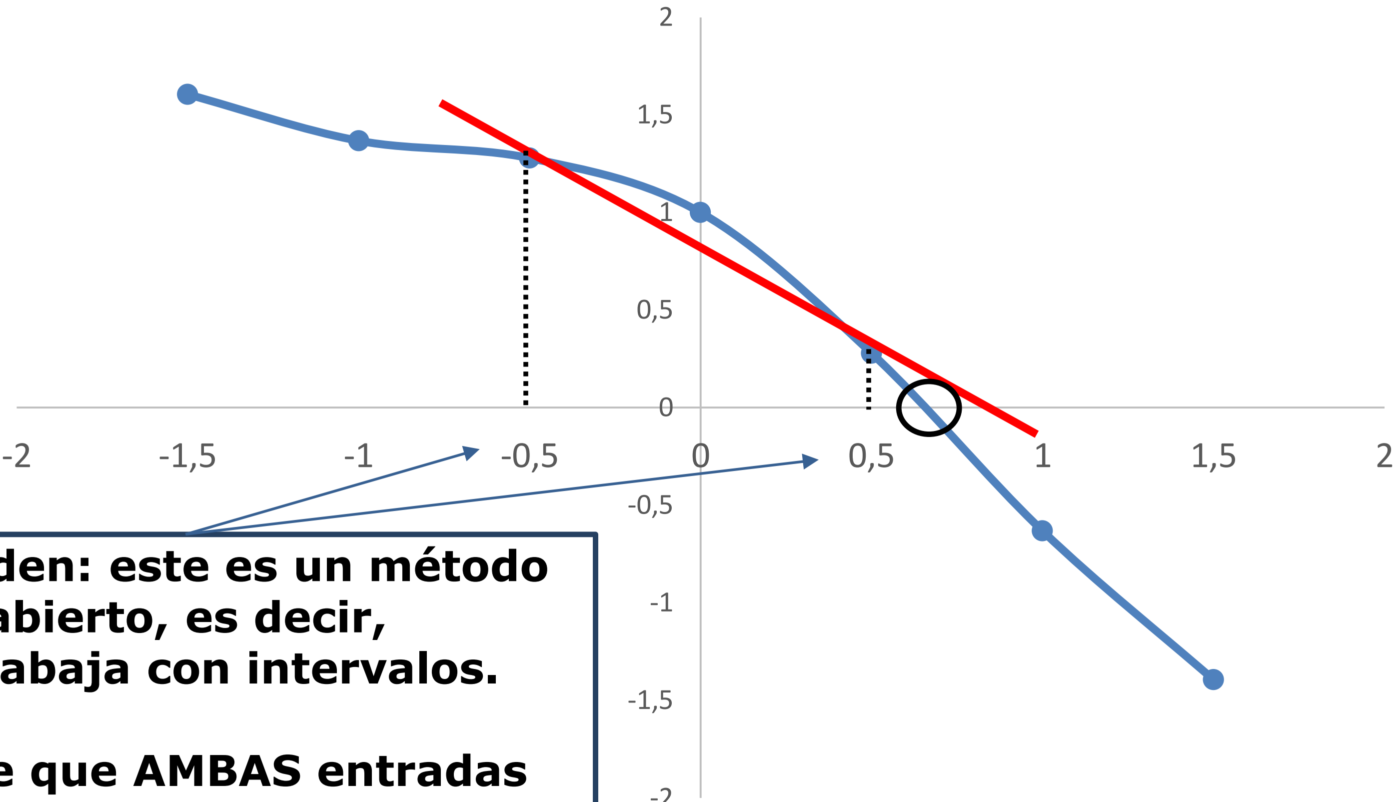
Y por lo mismo, encuentra la aproximación casi con la misma rapidez que el método de Newton-Raphson.

Claro, corre el mismo riesgo de no converger a la raíz, mientras que el método de la regla falsa es más seguro.

MÉTODO DE LA SECANTE

EJEMPLO. Aproxime la raíz de $f(x) = e^{-(x^2)} - x$

Con entradas Xo = -0.5 y X1 = 0.5, y hasta que Erp < 1%.



Recuerden: este es un método abierto, es decir,
NO trabaja con intervalos.

Fíjense que AMBAS entradas están a la izquierda de la raíz

MÉTODO DE LA SECANTE

Tenemos que f(xo) = 1.278801 y f(x1)=-0.278801, que sustituimos en la fórmula de la secante para calcular la aproximación **X2**:

$$x_2 = x_1 - \left[\frac{f(x_1)(x_0 - x_1)}{f(x_0) - f(x_1)}\right] = \mathbf{0.651708}$$

Con un error aproximado de

$$\mathbf{Erp} = \left|\frac{x_2 - x_1}{x_2} \times 100\%\right| = \mathbf{19.5\ \%}$$

Como todavía no se logra el objetivo continuamos con el proceso.

MÉTODO DE LA SECANTE

Resumimos los resultados en la siguiente tabla:

Valor	Aprox. Raiz	Erp
Xo	-0,5	
X1	0,5	
X2	0.651708	19,5
X3	0.652916	0,185

Como el Erp es menor al 1% planteado inicialmente (TOLERANCIA) se termina el proceso.

De lo cual concluimos que
la aproximación a la raíz es: $X_3 = 0.652916$

IMPLEMENTACIONES
NEWTON – RAPHSON Y SECANTE

```
void newton(double po, int N)
{
 double TOL=0.0000001 , ef=0.0 , edf=0.0, Er=0.0 , p=0.0 , c=0.0 , efp=0.0;
 int i = 1 ; //el "paso 1"
 cout<<"\n"<<"\t -- p -- "<<"\t\t -- f(p) -- "<<"\t\t-- Er -- ";

 //el "paso 2"
 while(i <= N)
 {
  ef = eval_funcion(po);
  edf = eval_derfuncion(po);
  c = ef / edf ; //   f(po) / f'(po)
  p = po - c;    //el "paso 3"
  efp = eval_funcion(p);
  Er = (p - po)/p;    if(Er<0) Er=Er*(-1); //esto es para ayudar al paso 4


  //presentacion de resultados iteracion a iteracion
  cout<<"\n"<<i<<"\t";
  std::cout.setf( std::ios::fixed, std:: ios::floatfield );
  std::cout << p;
  std::cout.unsetf( std::ios::floatfield );
  std::cout.precision(10);
  std::cout<<"\t\t"; std::cout << efp;
  std::cout<<"\t\t"; std::cout << Er;

  //el "paso 4"
  if(Er<TOL) {cout<<"\n\nProcedimiento completado satisfactoriamente\n"; syst

  //el "paso 5"
  i = i + 1;

  //el "paso 6"  redefinicion de po
  po = p;
 }

 //el "paso 7"
 if((i>N)||(Er>TOL)) {cout<<"\nEl metodo fracaso despues de "<<N<<" iteracion
 cout<<"\n"; system("pause");
}
```

```
void secante(double x0 , double x1 , int N)
{
 double TOL=0.0000001,  xr=0.0, xra=0.0, fx0=0.0 , fx1=0.0, fxr=0.0 ;
 double exr=0.0, er=0.0, A=0.0 , B=0.0, C=0.0, D=0.0;
 int i = 1;
 cout.precision(10);

 fx0=eval_funcion(x0);    fx1=eval_funcion(x1);
 A = x0 - x1;     B = fx1 * A;     C = fx0 - fx1;     D = B/C;    xr = x1 - D;
 cout<<"\n XR : "<<xr;    fxr = eval_funcion(xr);
 cout<<"\n"<<"n"<<"\t"<<"Raiz"<<"\t\t\t"<<"f(raiz)"<<"\t\t\t"<<"Er";

 while(i <= N)
 {
   xra = xr;
   x0 = x1;    x1 = xr;   //reajuste
   fx0=eval_funcion(x0);    fx1=eval_funcion(x1);
   A = x0 - x1;     B = fx1 * A;     C = fx0 - fx1;     D = B/C;     xr = x1 - D;
   fxr=eval_funcion(xr);

  //Calculo del error relativo
  exr = xr - xra;   er = exr/xr; if(er<0){er=er*(-1);}

  //presentacion de resultados iteracion a iteracion
  cout<<"\n"<<i<<"\t";
  std::cout.setf( std::ios::fixed, std:: ios::floatfield );
  std::cout << xr<<"\t";
  std::cout.unsetf( std::ios::floatfield );
  std::cout.precision(10);
  std::cout<<"\t\t"; std::cout << fxr;
  std::cout<<"\t\t"; std::cout << er;

  //si se tiene exito:
  if((fxr==0)||(er<TOL))
  {cout<<"\nProcedimiento completado satisfactoriamente\n"; system("pause"); exit(1);}

  i++;
 }

 if((i>N)&&(er>TOL)) {cout<<"\nEl metodo fracaso despues de "<<N<<" iteraciones";}
 cout<<"\n"; system("pause");
}
```

MÉTODO DE NEWTON - RAPHSON

Pero hay algo más:

Si las raíces tienen multiplicidad > 1,
estas degradan el rendimiento del método Newton - Raphson.

La presencia de una raíz múltiple
puede causar serios problemas de redondeo.

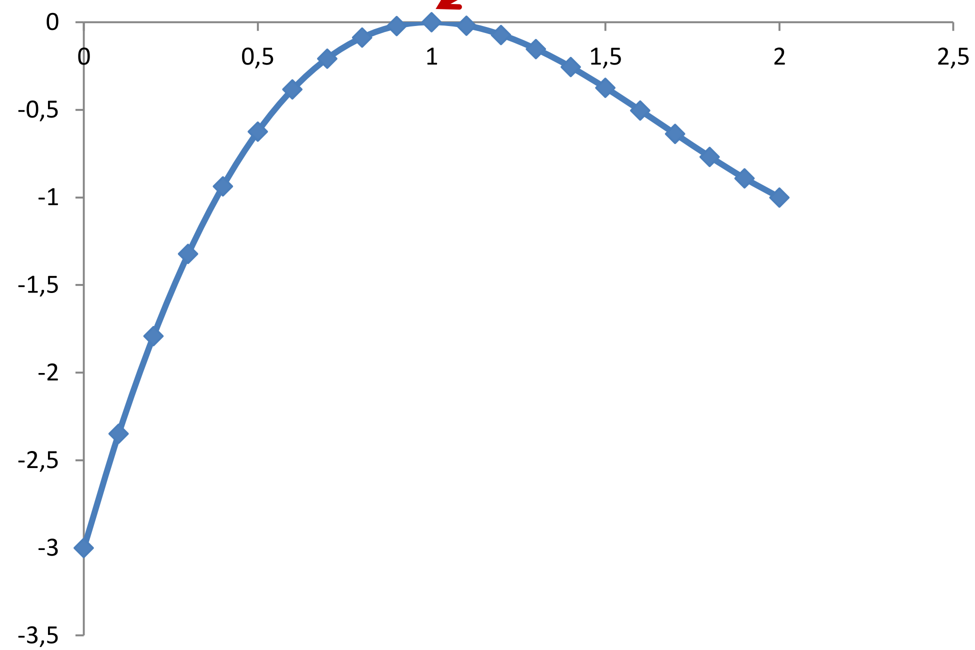
¿Y qué es una raíz

de multiplicidad MAYOR QUE 1,

también llamada RAÍZ MÚLTIPLE?

CONCEPTO DE RAÍCES MÚLTIPLES

Una raíz múltiple corresponde a un punto donde una función es tangencial al eje x.



Por ejemplo, existe una raíz de multiplicidad DOS (2) en :

$$f(x) = (x-3)\,(x-1)\,(x-1)$$

o multiplicando términos,

$$f(x) = x^3 - 5x^2 + 7x - 3$$

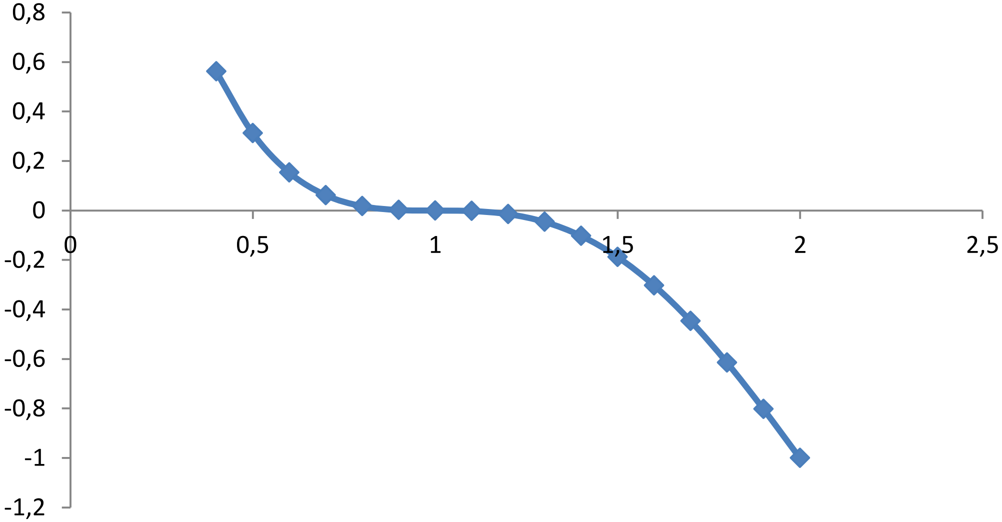
La ecuación tiene una raíz doble (o de multiplicidad 2) porque un mismo valor de x (en este caso x = 1) hace que DOS términos de la ecuación sean iguales a cero.

CONCEPTO DE RAÍCES MÚLTIPLES

Por ejemplo, existe una raíz de multiplicidad TRES (3) en :

$$f(x) = (x - 3)\,(x - 1)\,(x - 1)\,(x - 1)$$

o multiplicando términos, $f(x) = x^4 - 6x^3 + 12x^2 - 10x + 3$



La ecuación tiene una raíz triple (o de multiplicidad 3) porque un mismo valor de x (en este caso x = 1) hace que TRES términos de la ecuación sean iguales a cero.

Note que en la gráfica se indica que la función es tangente al eje en la raíz, pero a diferencia del ejemplo anterior, SÍ CRUZA EL EJE.

En general, la multiplicidad IMPAR de raíces CRUZA el eje, mientras que la multiplicidad PAR NO LO CRUZA.

CONCEPTO DE RAÍCES MÚLTIPLES

¿Cómo identificarlas? El siguiente teorema da una manera fácil:

Una función f tiene un cero (o raíz) simple en p (p pertenece al intervalo [a,b])

$$\text{si y solo si} \quad f(p) = 0\,, \quad \text{pero } f^{(1)}(p) \neq 0.$$

Una función f tiene un cero de multiplicidad m (p pertenece al intervalo [a,b])

$$0 = f(p) = f^{(1)}(p) = f^{(2)}(p) = \ldots = f^{(m-1)}(p)\,, \quad \text{pero } f^{(m)}(p) \neq 0.$$

CONCEPTO DE RAÍCES MÚLTIPLES

Revisemos las funciones de los ejemplos para encontrar el valor de la multiplicidad, que denotaremos como m:

$\mathbf{f(x) = (x - 3)\ (x - 1)\ (x - 1)}$

$f(x) = x^3 - 5x^2 + 7x - 3$

$f^{(1)}(x) = 3x^2 - 10x + 7$ $\quad$ $f^{(1)}(1) = 3(1)^2 - 10(1) + 7 = 0$

$f^{(2)}(x) = 6x - 10$ $\quad$ $f^{(2)}(1) = 6(1) - 10 = -4$

NO DA CERO en la segunda derivada, por tanto $m=2$

$\mathbf{f(x) = (x - 3)\ (x - 1)\ (x - 1)\ (x - 1)}$

$f(x) = x^4 - 6x^3 + 12x^2 - 10x + 3$

$f^{(1)}(x) = 4x^3 - 18x^2 + 24x - 10$ $\quad$ $f^{(1)}(1) = 4(1)^3 - 18(1)^2 + 24(1) - 10 = 0$

$f^{(2)}(x) = 12x^2 - 36x + 24$ $\quad$ $f^{(2)}(1) = 12(1)^2 - 36(1) + 24 = 0$

$f^{(3)}(x) = 24x - 36$ $\quad$ $f^{(3)}(1) = 24(1) - 36 = -12$

NO DA CERO en la tercera derivada, por tanto $m=3$

CONCEPTO DE RAÍCES MÚLTIPLES

Para "atacar" ese problema, se puede usar la fórmula de NEWTON GENERALIZADA para raíces múltiples.

$$g(x) = x - \frac{f(x)\ f'(x)}{[f'(x)]^2 - [f(x)\ f''(x)]}$$

CONCEPTO DE RAÍCES MÚLTIPLES

Anteriormente, habíamos trabajado $f(x) = x^3 + 4x^2 - 10 = 0$

Y la raíz analítica es x = 1.365230013.

Además: $f'(x) = 3x^2 + 8x$. $f'(1.365230013) = 3(1.365230013)^2 + 8(1.365230013) \neq 0$

Por lo tanto esa raíz NO ES MÚLTIPLE y no afecta el desempeño del método

Con Newton : $$p_n = p_{n-1} - \frac{p_{n-1}^3 + 4\,p_{n-1}^2 - 10}{3\,p_{n-1}^2 + 8\,p_{n-1}}$$

Con Newton generalizado: $$p_n = p_{n-1} - \frac{(p_{n-1}^3 + 4\,p_{n-1}^2 - 10)\,(3\,p_{n-1}^2 + 8\,p_{n-1})}{(3\,p_{n-1}^2 + 8\,p_{n-1})^2 - (p_{n-1}^3 + 4\,p_{n-1}^2 - 10)\,(6\,p_{n-1} + 8)}$$

Con po = 1.5, las primeras iteraciones para
(i)[Newton normal] y (ii)[Newton generalizado] son las siguientes:

	(i)	(ii)
p_1	1.373333333	1.356898976
p_2	1.365262015	1.365195849
p_3	1.365230014	1.365230013
p_4	1.365230013	1.365230013

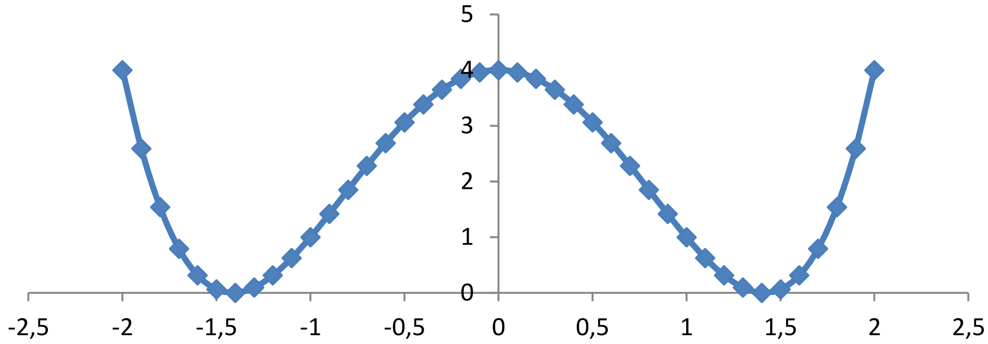
CONCEPTO DE RAÍCES MÚLTIPLES

Ahora, la siguiente función:

$f(x) = (x^2 – 2)(x^2 – 2)$.

Equivalente a $f(x) = x^4 - 4x^2 + 4 = 0$.

Raíz 1 = $\sqrt{2}$, Raíz 2 = $-\sqrt{2}$.



$f'(x) = 4x^3 - 8x$. $f'(\sqrt{2}) = 4(\sqrt{2})^3 - 8(\sqrt{2}) = 0$. Se continúa:

$f''(x) = 12x^2 - 8$. $f'(\sqrt{2}) = 12(\sqrt{2})^2 - 8(\sqrt{2}) \neq 0$. NO DA CERO en la segunda derivada, por tanto m=2

De modo que la raíz SÍ ES MÚLTIPLE y afectará el desempeño del método:

Con po = 1.5, las tres primeras iteraciones para
(i)[Newton normal] y (ii)[Newton generalizado]
son las siguientes:

	(i)	(ii)
p_1	1.458333333	1.411764706
p_2	1.436607143	1.414211438
p_3	1.425497619	1.414213562