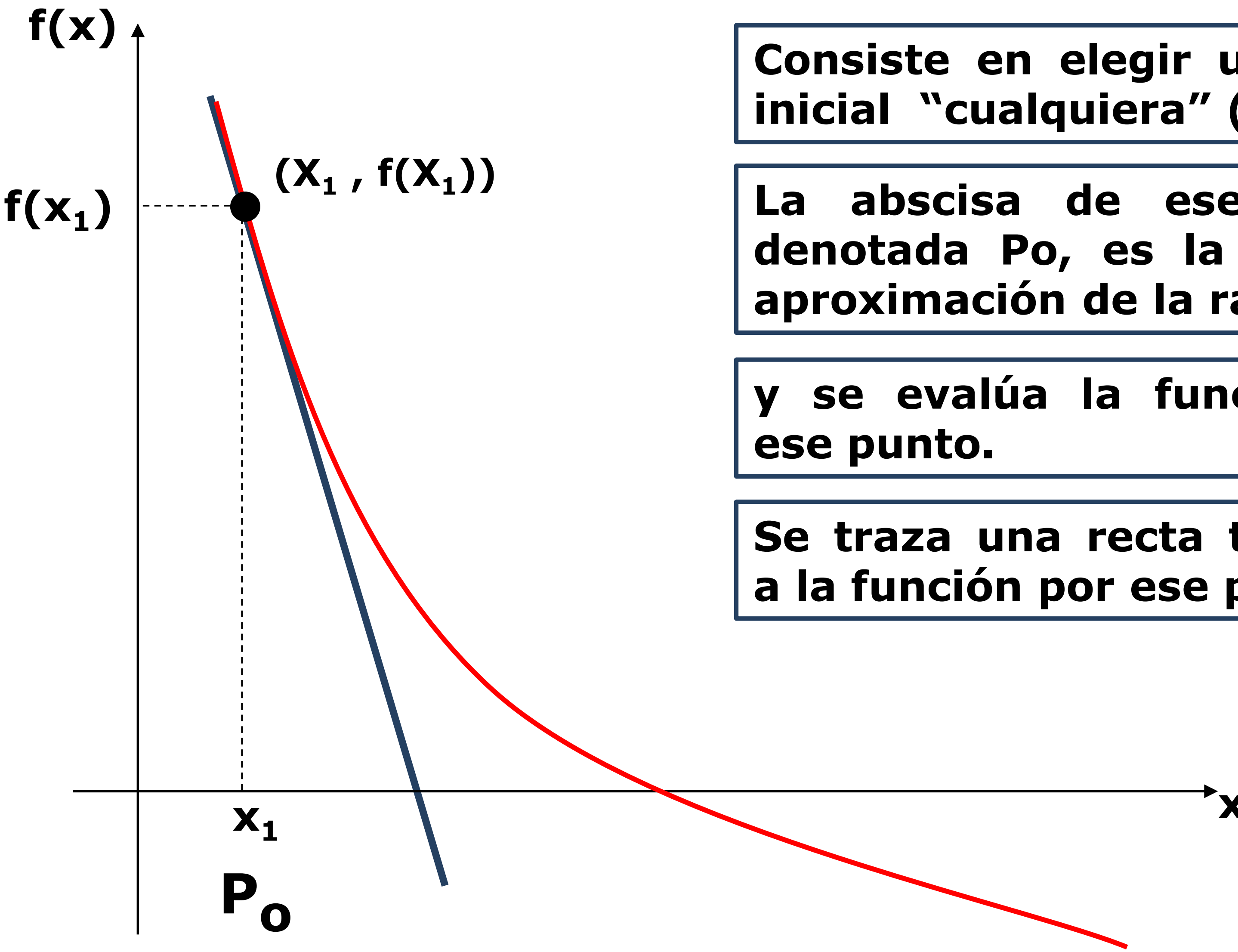
ANÁLISIS NUMÉRICO

Mag. Carlos Alberto Ardila Albarracín

BLOQUE 1. RAÍCES DE ECUACIONES DE UNA VARIABLE

1.3. MÉTODO DE NEWTON - RAPHSON

MÉTODO DE NEWTON - RAPHSON



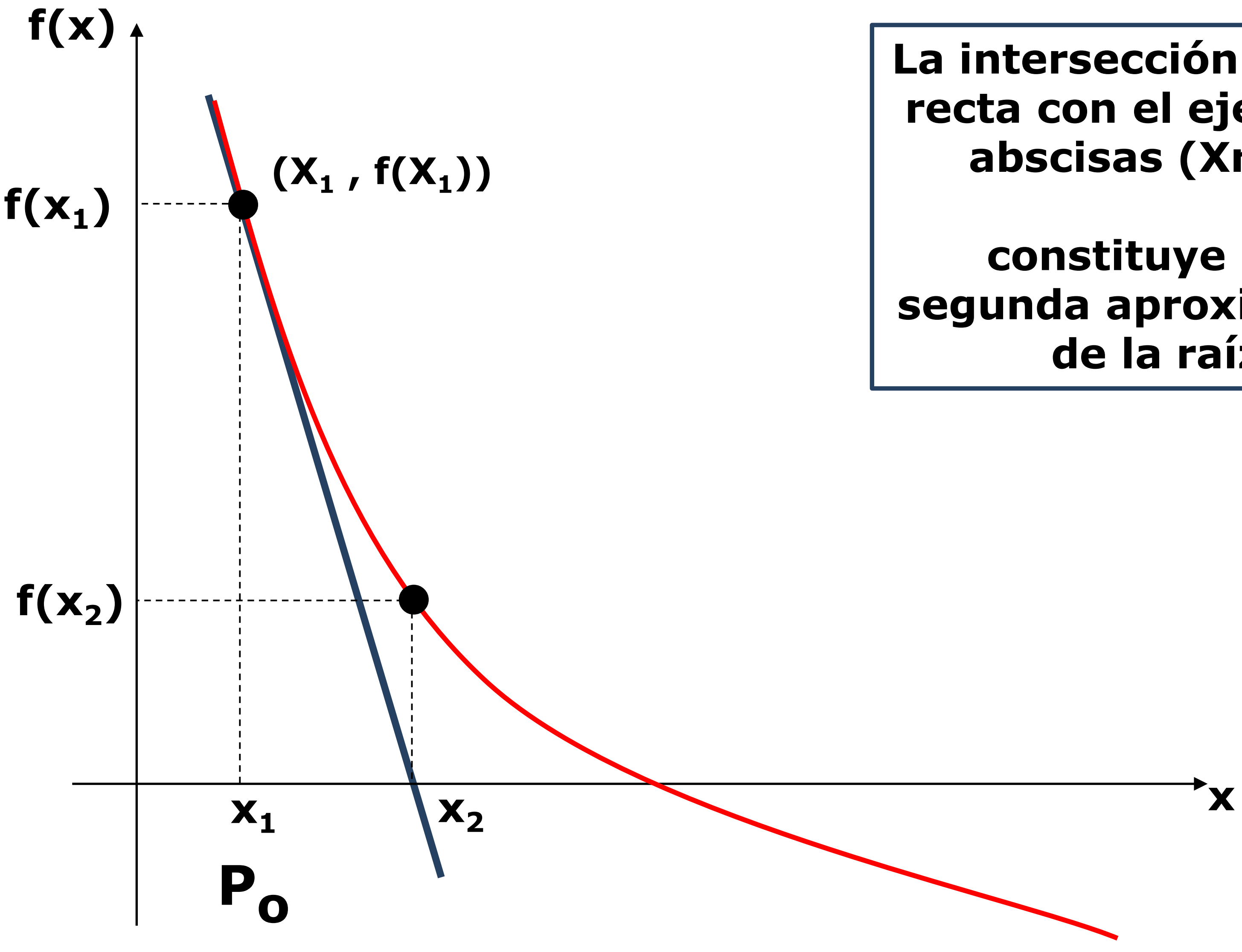
Consiste en elegir un punto inicial "cualquiera" (¡ojo!).

La abscisa de ese punto, denotada Po, es la primera aproximación de la raíz

y se evalúa la función por ese punto.

Se traza una recta tangente a la función por ese punto.

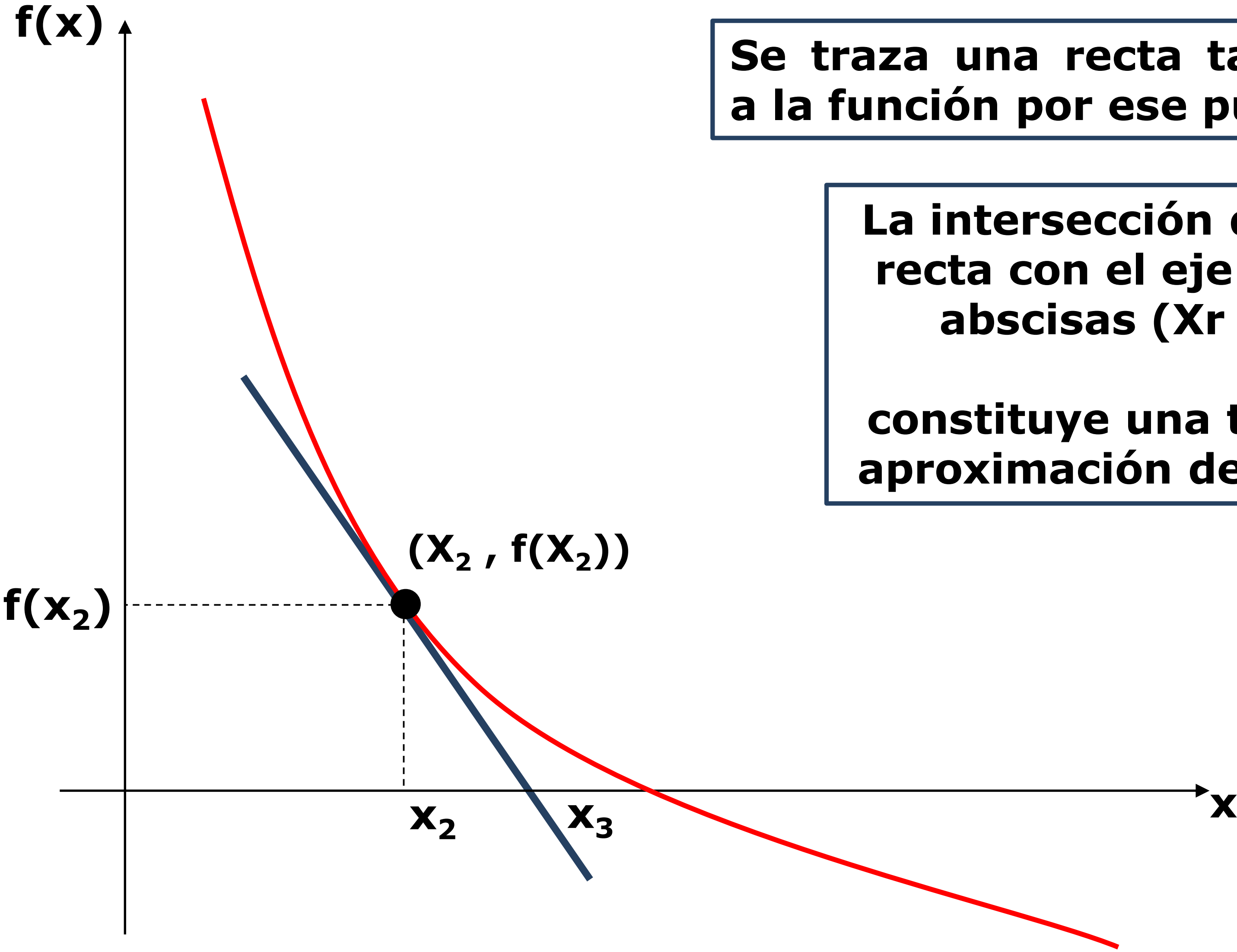
MÉTODO DE NEWTON - RAPHSON



La intersección de esta recta con el eje de las abscisas (Xr , 0)

constituye una segunda aproximación de la raíz

MÉTODO DE NEWTON - RAPHSON

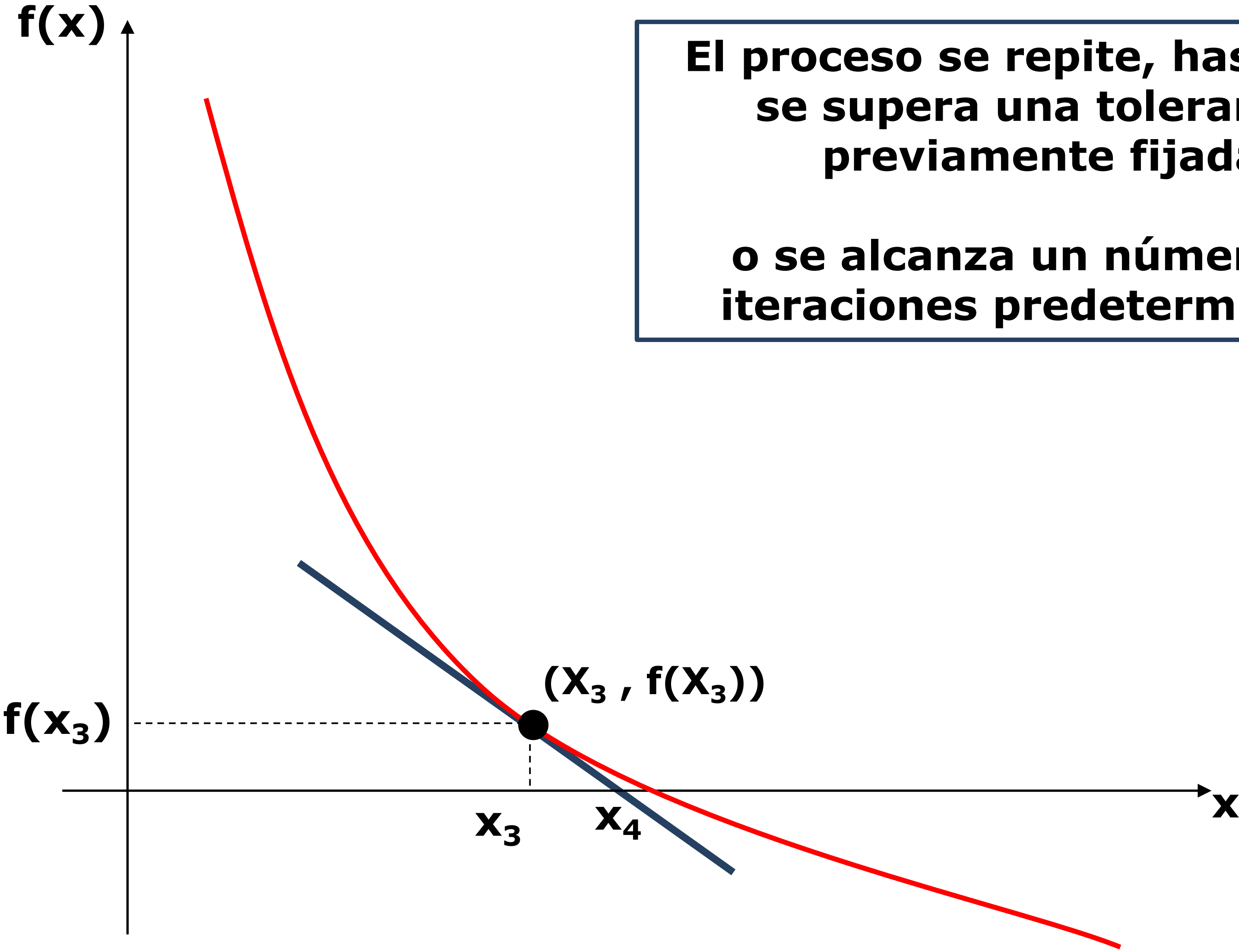


Se traza una recta tangente a la función por ese punto.

La intersección de esta recta con el eje de las abscisas (Xr , 0)

constituye una tercera aproximación de la raíz

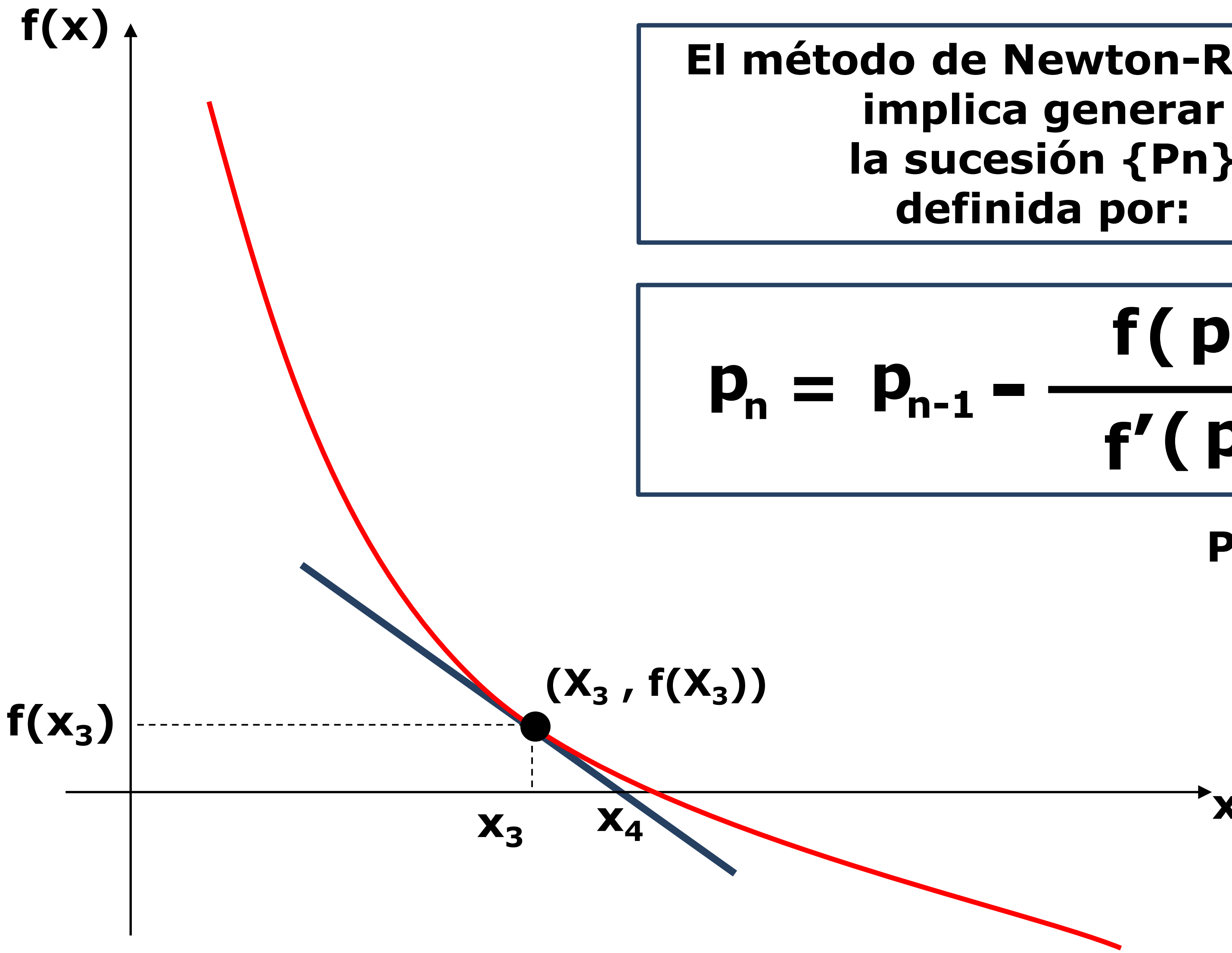
MÉTODO DE NEWTON - RAPHSON



El proceso se repite, hasta que se supera una tolerancia previamente fijada

o se alcanza un número de iteraciones predeterminado

MÉTODO DE NEWTON - RAPHSON



El método de Newton-Raphson implica generar la sucesión {Pn} definida por:

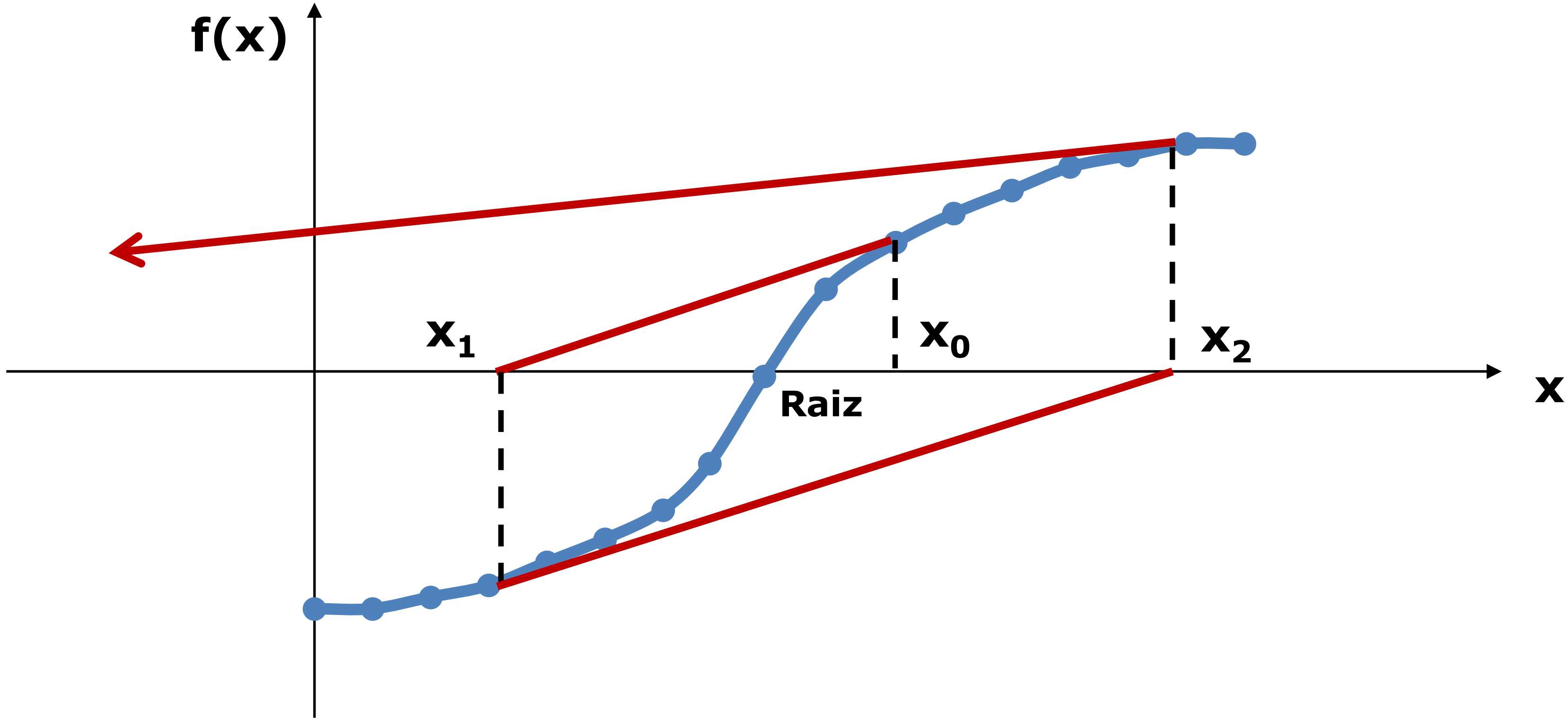
$$p_n = p_{n-1} - \frac{f(p_{n-1})}{f'(p_{n-1})}$$

Para n ≥ 1

MÉTODO DE NEWTON - RAPHSON

Aunque el método trabaja bien, no existe garantía de convergencia

Si en las proximidades de la raíz existe un punto de inflexión, las iteraciones divergen progresivamente de la raíz.



MÉTODO DE NEWTON - RAPHSON

==

Para encontrar una solución de f(x) = 0 dada una aproximación inicial **Po**

Entradas: Aproximación inicial Po, tolerancia **TOL**, número máximo de iteraciones **N**

Salida: Solución aproximada **p** ó mensaje de fracaso

Paso 1: tomar i = 1. (La variable **i** es la contadora de iteraciones).

Paso 2: Mientras (i<=N) seguir pasos 3 a 6:

Paso 3: Tomar p = po **-** (f(po) / f'(po)) //Para calcular la nueva raíz

Paso 4: si (error relativo < TOL) entonces mostrar **p** y **PARAR**

Paso 5: tomar i = i + 1

Paso 6: tomar po = p //redefinición de po

Paso 7: SALIDA. El método ha fracasado después de N iteraciones y **PARAR**

==

MÉTODO DE NEWTON - RAPHSON

Algunas consideraciones:

Note que el método de Newton-Raphson no trabaja con intervalos donde nos asegure que encontraremos la raíz, y de hecho no tenemos ninguna garantía de que nos aproximaremos a dicha raíz.

Desde luego, existen ejemplos donde este método no converge a la raíz, en cuyo caso se dice que el método diverge.

Sin embargo, en los casos donde converge a la raíz lo hace con una rapidez mucho mayor que otros métodos.

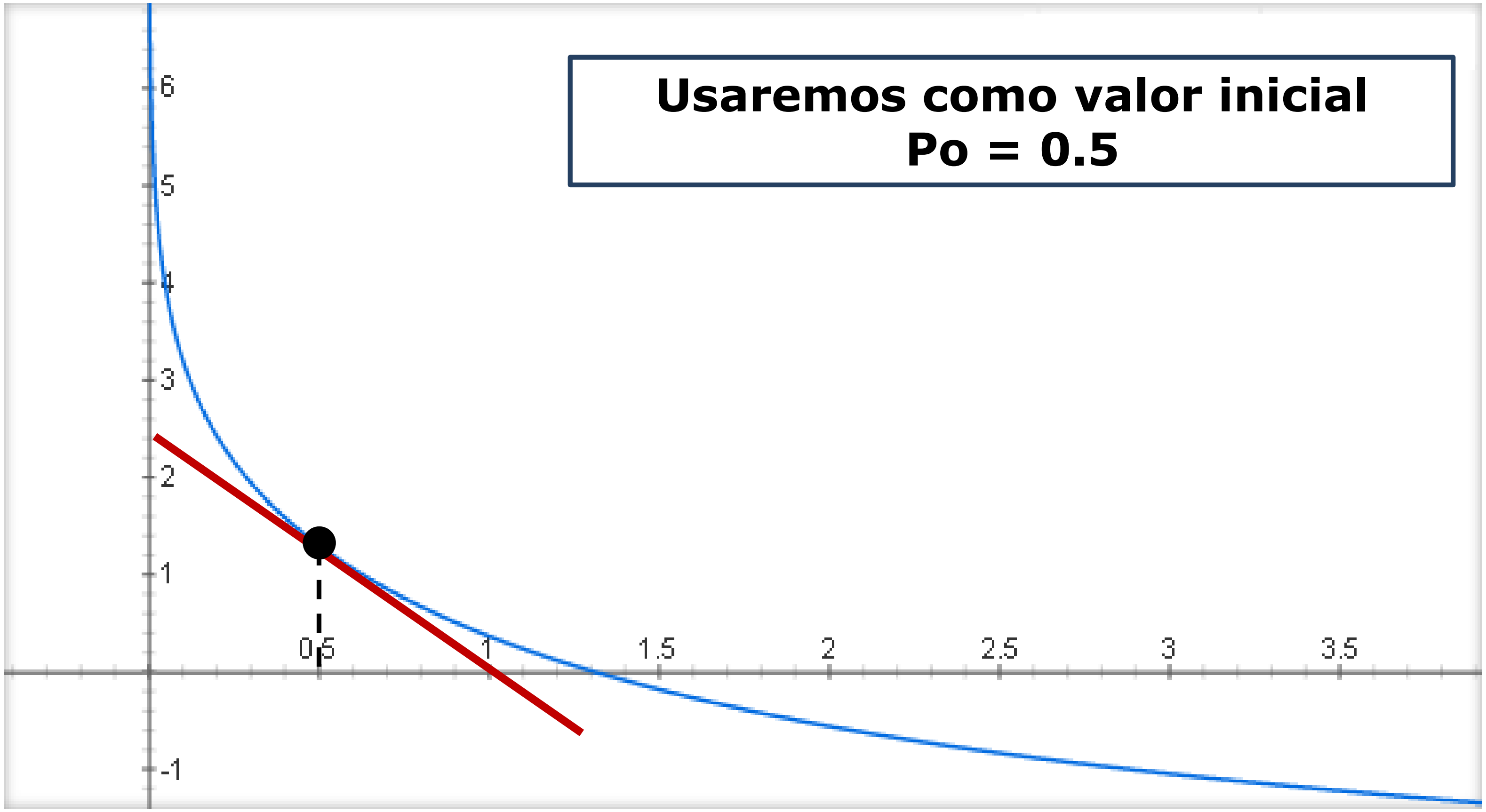
En el caso de que f '(Po) = 0, el método no se puede aplicar.

De hecho, geométricamente esto significa que la recta tangente es horizontal y por lo tanto no intersecta al eje x en ningún punto.

MÉTODO DE NEWTON - RAPHSON

Ejemplo 1. Aproximar la raíz de $f(x) = e^{-x} - \ln(x)$
Hasta que el error relativo porcentual sea menor al 1%

Gráfico de e^-x-ln(x)



MÉTODO DE NEWTON - RAPHSON

$f(x) = e^{-x} - \ln(x)$

$f(0,5) = (1 / e^{0,5}) - \ln(0,5)$

$f(0,5) = 1.29967$

$f'(x) = -e^{-x} - (1 / x)$

$f'(0,5) = -(1/e^{0,5}) - (1 / 0,5)$

$f'(0,5) = -2.60653$

$\mathbf{p} = po - (f(po) / f'(po))$

$\mathbf{p} = 0.5 - (1.29967 / -2.60653) = 0.99862$

Erp = | (0.99862 - 0.5) / 0.99862 | = 49.93%

Como no se ha logrado el objetivo, continuamos con el proceso

Dado que p no sirvió, se reasigna como po ….

MÉTODO DE NEWTON - RAPHSON

p = 0.99862 - (0.36976 / -1.36976) = 1.26857

Erp = | (1.26857 - 0.99862) / 1.26857 | = 21.28%

Puesto que no se ha logrado el objetivo, continuamos con el proceso

Dado que p no sirvió, se reasigna como $\mathbf{p}_0$

p = 1.26857 - (0.04334 / -1.06952) = 1.30909

Erp = | (1.30909 - 1.26857) / 1.30909 | = 3.09%

Puesto que no se ha logrado el objetivo, continuamos con el proceso

Dado que p no sirvió, se reasigna como $\mathbf{p}_0$

p = 1.30909 - (0.000727 / -1.03395) = 1.309799

Erp = | (1.309799 - 1.30909) / 1.309799 | = 0.0053%

¡Objetivo logrado!