ANÁLISIS NUMÉRICO

Mag. Carlos Alberto Ardila Albarracín

BLOQUE 1. RAÍCES DE ECUACIONES DE UNA VARIABLE

TEOREMA DEL VALOR INTERMEDIO

Teorema del Valor Intermedio

Si $f \in C[a,b]$ y K es un número cualquiera entre $f(a)$ y $f(b)$,
entonces existe c en (a,b) tal que $f(c) = K$

Corolario

Si $f \in C[a,b]$ asume valores de signo opuesto
en los extremos de un intervalo $[\alpha , \beta]$,
es decir, $f(\alpha) * f(\beta) < 0$,
entonces el intervalo contendrá **al menos una raíz** de la ecuación $f(x) = 0$;

En otras palabras, habrá al menos un número $p \in (\alpha , \beta)$ tal que $f(p) = 0$.

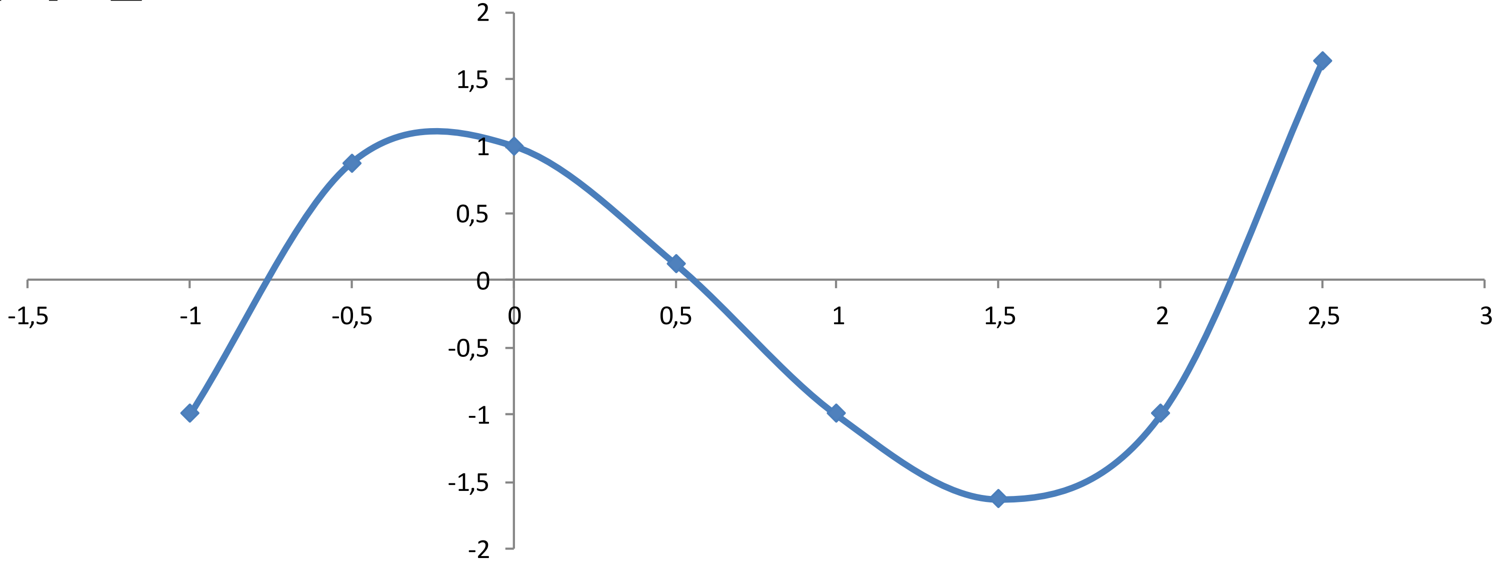
La raíz p será única si la derivada $f'(x)$ existe y
mantiene el signo dentro del intervalo (α , β);

esto es, si $f'(x) > 0$ (ó $f'(x) < 0$) para $\alpha < x < \beta$.

1.0 Ambientación y Consideraciones Generales

Ejemplo de aplicación del Corolario asociado al Teorema del Valor Intermedio:

$$\mathbf{f(x) = x^3 - 2x^2 - x + 1}$$



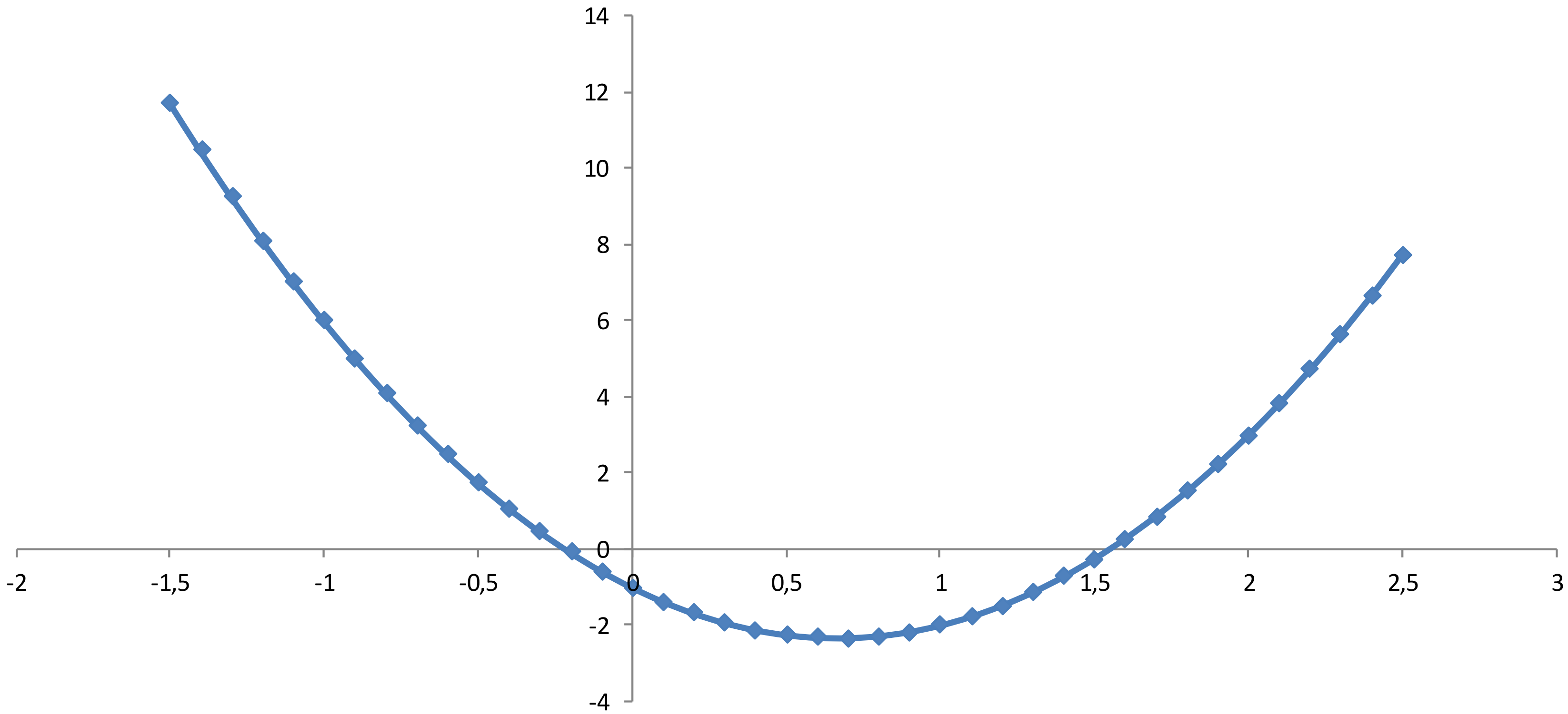
Evaluemos f(x) en los extremos del intervalo [-1 , -0.5]:

$f(-1) = (-1)^3 - 2(-1)^2 - (-1) + 1$
$f(-1) = (-1) - 2(1) + 1 + 1$
$f(-1) = -1 - 2 + 1 + 1$
$f(-1) = -1$

$f(-0.5) = (-0.5)^3 - 2(-0.5)^2 - (-0.5) + 1$
$f(-0.5) = (-0.125) - 2(0.25) + 0.5 + 1$
$f(-0.5) = -0.125 - 0.5 + 0.5 + 1$
$f(-0.5) = 0.875$

¡SIGNOS DIFERENTES! Hasta aquí solo se puede afirmar que el intervalo contiene ***al menos una*** raíz.

Ahora veamos su derivada. $f^{(1)}(x) = 3x^2 - 4x - 1$. Su gráfica es:



Se observa que **mantiene** el signo dentro del intervalo [-1, -0.5].
Ahora se puede afirmar que ese intervalo contiene ***solo una*** raíz de **f(x)**.

Contra-ejemplo:
Evaluemos f(x) en los extremos del intervalo [-1 , 2.5]:

$f(-1) = (-1)^3 - 2(-1)^2 - (-1) + 1$
$f(-1) = (-1) - 2(1) + 1 + 1$
$f(-1) = -1 - 2 + 1 + 1$
$f(-1) = -1$

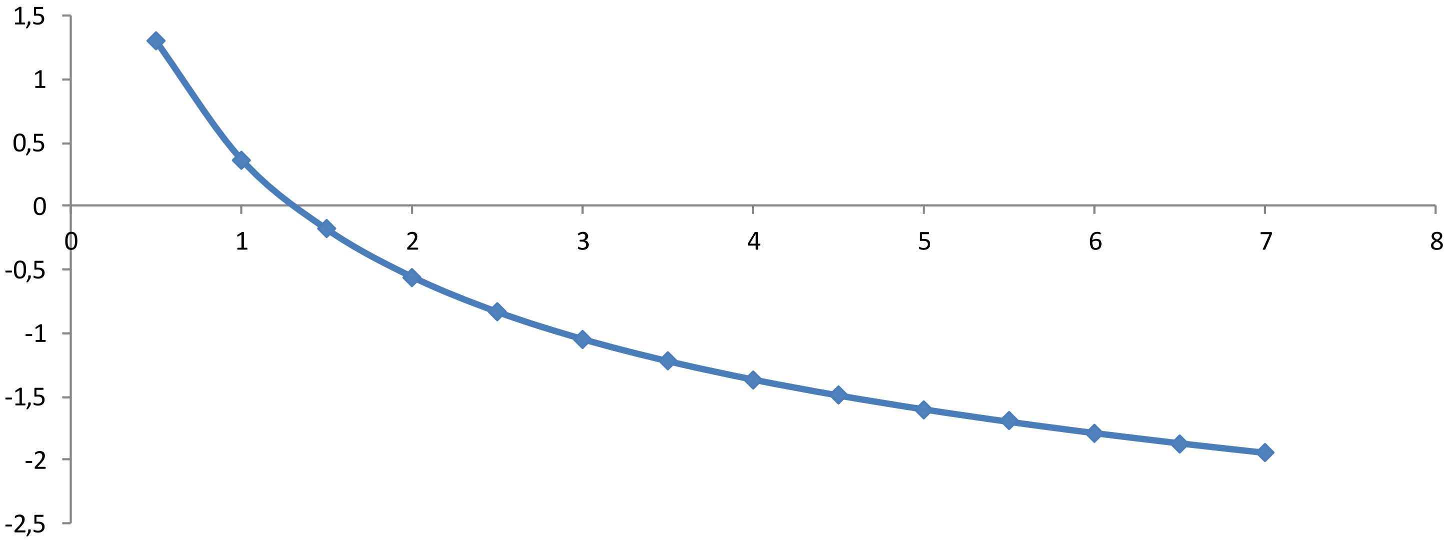
$f(2.5) = (2.5)^3 - 2(2.5)^2 - (2.5) + 1$
$f(2.5) = (15.625) - 2(6.25) - 2.5 + 1$
$f(2.5) = 15.625 - 12.5 - 2.5 + 1$
$f(2.5) = 1.625$

¡SIGNOS DIFERENTES! Hasta este momento solo se puede afirmar que ese intervalo contiene ***al menos una*** raíz de esa función.

Pero al observar la gráfica de $f^{(1)}(x) = 3x^2 - 4x - 1$, se observa que **NO mantiene** el signo dentro del intervalo [-1, 2.5].

Eso significa que el intervalo contiene ***más de una*** raíz para **f(x)** y por lo tanto **NO ES ÚTIL** para un método que use intervalos como Bisección o Regla Falsa.

$$f(x) = e^{-x} - \ln(x)$$



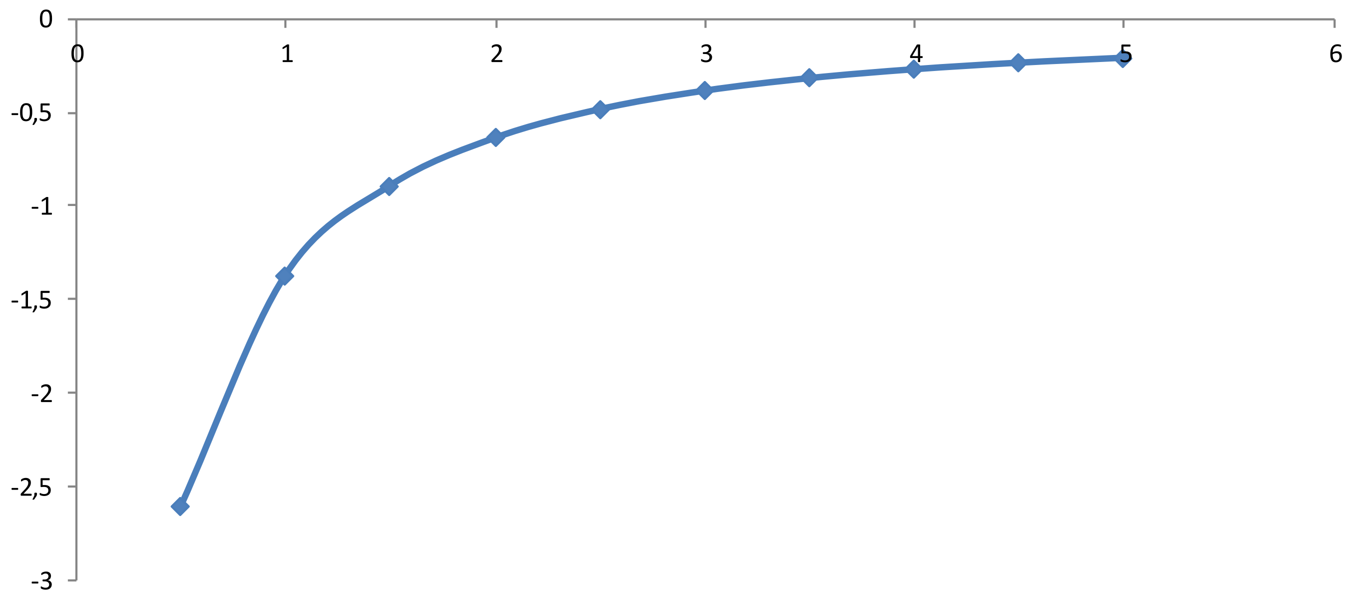
Evaluemos f(x) en los extremos del intervalo [1 , 2]:

$f(1) = (e)^{-(1)} - \ln(1)$	$f(2) = (e)^{-(2)} - \ln(2)$
$f(1) = (1/e) - 0$	$f(2) = (1/e^{2}) - 0.693147$
$f(1) = 0.367879$	$f(2) = 0.135335 - 0.693147 = - 0.557812$

¡SIGNOS DIFERENTES! Hasta aquí solo se puede afirmar que el intervalo contiene ***al menos una*** raíz.

1.0 Ambientación y Consideraciones Generales

Ahora veamos su derivada. $f^{(1)}(x) = - e^{-x} - (1/x)$. Su gráfica es:



Se observa que mantiene el signo dentro del intervalo [1, 2].

Ahora se puede afirmar que el intervalo contiene solo una raíz de f(x).

---------------- FIN DEL DOCUMENTO