Introducción a la Lógica Proposicional
Seminario de Matemáticas

Julio Ariel Hurtado Alegría
ahurtado@unicauca.edu.co

8 de mayo de 2015

Universidad del Cauca

Agenda

Universidad del Cauca

Lógica Matemática

Lógica Matemática

- La lógica matemática hace referencia a la formalización y análisis de tipos de razonamientos en el resto de la matemática.
- El punto de la lógica matemática no es intentar hacer matemáticas, sino estudiar los sistemas lógicos formales como objetos matemáticos y probar propiedades acerca de ellos.

Universidad del Cauca

Lógica Proposicional y Lógica de Primer Orden

- El estándar de facto para formalizar sistemas matemáticos es la lógica de primer orden.
- La lógica proposicional busca precisar las relaciones de conectivos lógicos $\neg \vee \wedge \rightarrow \leftrightarrow$.
- La lógica proposicional es insuficiente para formalizar la mayoría de discursos matemáticos.
- La lógica de primer orden agrega a la lógica proposicional los cuantificadores $\forall$ y $\exists$ para formalizar la mayor parte del razonamiento matemático.
- La flexibilidad y el poder de la lógica de primer orden la hacen más compleja, tanto en su sintaxis como en su semántica.

Universidad del Cauca

Lógica Proposicional - Sintaxis

Sea P el conjunto de variables proposicionales que pueden adquirir un valor de verdad, por ejemplo p, q, r, s son variables proposicionales.

Se define la $\mathcal{L}(P)$ como el conjunto de todas las fórmulas proposicionales como:

1. Si $p \in P \rightarrow p \in \mathcal{L}(P)$
2. Si $\alpha \in \mathcal{L}(P) \rightarrow (\neg\alpha) \in \mathcal{L}(P)$.
3. Si α y $\beta \in \mathcal{L}(P) \rightarrow$ $(\alpha \circ \beta) \in \mathcal{L}(P)$, Donde $\circ \in \{\wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow\}$

Universidad del Cauca

Subfórmulas

Sean φ , α y $\beta \in \mathcal{L}(P)$. El conjunto de *subformulas* de φ, $\mathcal{S}(\varphi)$, se define como.

1. Si$\varphi = p \in P \to \mathcal{S}(\varphi) = \{\varphi\}$.
2. Si $\varphi = (\neg\alpha) \to \mathcal{S}(\varphi) = \mathcal{S}(\alpha) \cup \{(\neg\alpha)\}$.
3. Si $\varphi = (\alpha \circ \beta) \to \mathcal{S}(\varphi) = \mathcal{S}(\alpha) \cup \mathcal{S}(\beta) \cup \{(\alpha \circ \beta)\}$. Donde $\circ \in \{\wedge, \vee, \to, \leftrightarrow\}$

Universidad del Cauca

Ejemplo de Subfórmula

Por ejemplo si φ is $(((\neg p) \rightarrow q) \rightarrow r \rightarrow p)$, entonces $\mathcal{S}(\varphi)$ incluye p, q, r, $(\neg p)$, $(r \rightarrow p)$, $((\neg p) \rightarrow q)$, y la fórmula $(((\neg p) \rightarrow q) \rightarrow (r \rightarrow p))$ misma.

Universidad del Cauca

Ejercicios

Encuentre todas las subfómulas de las siguientes subfórmulas.

1. $(\neg((\neg p) \rightarrow q))$
2. $p \rightarrow q \rightarrow \neg(r \rightarrow \neg\neg s)$
3. $\neg p \wedge \neg q \leftrightarrow \neg(p \vee q)$

Universidad del Cauca

Semántica de la Lógica Proposicional

Sea P el conjunto de variables proposicionales y sea δ una función de asignación de verdad para P tal que $\delta : P \to \{0,1\}$. Dada una fórmula $\varphi \in \mathcal{L}(P)$, se define $\sigma(\varphi) : \mathcal{L}(P) \to \{0,1\}$ por inducción estructural como:

1. Si $\varphi = p \in P$, $\sigma(p) = \delta(p)$,
2. Si $\varphi = \neg\alpha$,

$$\sigma(\,(\neg\alpha)) = \begin{cases} 1 & \text{Si } \sigma(\alpha) = 0 \\ 0 & \text{Si } \sigma(\alpha) = 1. \end{cases}$$

3. Si $\varphi = \alpha \circ \beta$,

$$\sigma(\,(\alpha \wedge \beta)\,) = \begin{cases} 1 & \text{Si } \sigma(\alpha) = 1 \text{ y } \sigma(\beta) = 1 \\ 0 & \text{Si } \sigma(\alpha) = 0 \text{ o } \sigma(\beta) = 0 \end{cases}$$

Universidad del Cauca

Semántica de la lógica proposicional

$$\sigma(\,(\alpha \vee \beta)\,) = \begin{cases} 0 & \text{Si } \sigma(\alpha) = 0 \text{ y } \sigma(\beta) = 0 \\ 1 & \text{Si } \sigma(\alpha) = 1 \text{ o } \sigma(\beta) = 1 \end{cases}$$

$$\sigma(\,(\alpha \rightarrow \beta)\,) = \begin{cases} 0 & \text{Si } \sigma(\alpha) = 1 \text{ y } \sigma(\beta) = 0 \\ 1 & \text{Si } \sigma(\alpha) = 0 \text{ o } \sigma(\beta) = 1 \end{cases}$$

$$\sigma(\,(\alpha \leftrightarrow \beta)\,) = \begin{cases} 0 & \text{Si } \sigma(\alpha) \neq \sigma(\beta) \\ 1 & \text{Si } \sigma(\alpha) = \sigma(\beta) \end{cases}$$

Equivalencia Lógica

Las fórmulas φ y ψ son lógicamente equivalentes si $\forall\sigma$ se tiene que $\sigma(\varphi) = \sigma(\psi)$
Por ejemplo, demostrar que $(p \rightarrow q) \equiv ((\neg p) \vee q)$

Universidad del Cauca

Equivalencia Lógica con tablas de verdad

p	q	$\neg p$	$p \rightarrow q$	$\neg p \vee q$
0	0	1	1	1
0	1	1	1	1
1	0	0	0	0
1	1	0	1	1

$\therefore \forall \sigma_{i=1\ldots4}$ se cumple que $\sigma_i(p \rightarrow q) = \sigma_i(\neg p \vee q)$

Universidad del Cauca

Ejercicio *Función de Reemplazo*

Demostrar que si $\varphi \in \mathcal{L}(P)$ se obtiene de $\psi \in \mathcal{L}(P)$ reemplazando una subfórmula de φ por otra equivalente, entonces $\varphi \equiv \psi$

1. Defina inductivamente una función de reemplazo
2. Use la función de reemplazo para demostrar inductivamente la hipótesis.

Universidad del Cauca

Equivalencias Útiles

1. Conmutativa de la disyunción: $(\varphi \vee \psi) \equiv (\psi \vee \varphi)$
2. Conmutativa de la conjunción: $(\varphi \wedge \psi) \equiv (\psi \wedge \varphi)$
3. Asociativa de la disyunción: $((\varphi \vee \psi) \vee \alpha) \equiv (\varphi \vee (\psi \vee \alpha))$
4. Asociativa de la conjunción: $((\varphi \wedge \psi) \wedge \alpha) \equiv (\varphi \wedge (\psi \wedge \alpha))$
5. Distributiva de la disyunción: $(\varphi \vee (\psi \wedge \alpha)) \equiv ((\varphi \vee \psi) \wedge (\varphi \vee \alpha)))$
6. Distributiva de la conjunción: $(\varphi \wedge (\psi \vee \alpha)) \equiv ((\varphi \wedge \psi) \vee (\varphi \wedge \alpha)))$
7. Ley de Morgan Disyunción: $(\neg(\varphi \wedge \psi)) \equiv ((\neg\varphi) \vee (\neg\psi))$
8. Ley de Morgan Conjunción: $(\neg(\varphi \vee \psi)) \equiv ((\neg\varphi) \wedge (\neg\psi))$
9. Doble negación: $(\neg(\neg\varphi)) \equiv \varphi$

Universidad del Cauca

Simplificando y Generalizando

Las Reglas 3 y 4 nos permiten deshacernos de los paréntesis:
$\varphi_1 \vee \varphi_2 \vee \varphi_3$, en general tenemos que:
$\bigvee_{i=1}^{n} \varphi_i = \varphi_1 \vee \varphi_2 \vee \varphi_3 \vee \ldots \varphi_i \ldots \vee \varphi_n$
$\bigwedge_{i=1}^{n} \varphi_i = \varphi_1 \wedge \varphi_2 \wedge \varphi_3 \wedge \ldots \varphi_i \ldots \wedge \varphi_n$

Universidad
del Cauca

Tipos de Fórmulas

Una fórmula $\varphi \in \mathcal{L}(P)$ es:

1. Una Tautología si $\forall\sigma$ se tiene que $\sigma(\varphi) = 1$
2. Es satisfacible si $\exists\sigma$ tal que $\sigma(\varphi) = 1$
3. Una Contradicción si $\forall\sigma$ se tiene que $\sigma(\varphi) = 0$

Universidad
del Cauca

Deducción de Fórmulas a Partir de Tablas de Verdad

Considere una fórmula $\varphi \in \mathcal{L}(P)$ con $P = \{p, q, r\}$ donde lo único que se conoce es que φ cumple con la siguiente tabla de verdad:

p	q	r	φ
0	0	0	1
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	1
1	0	1	0
1	1	0	0
1	1	1	1

- ¿Podemos encontrar una fórmula α tal que $\alpha \equiv \varphi$?
- ¿Qué Operadores necesitaríamos?

Universidad del Cauca

Una posible solución

$$\alpha \equiv ((\neg p) \wedge (\neg q) \wedge (\neg r)) \vee ((\neg p) \wedge q \wedge r) \vee (p \wedge (\neg q) \wedge (\neg r) \vee (p \wedge q \wedge r)$$

p	q	r	φ
0	0	0	$\underline{1}$
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	$\underline{1}$
1	0	0	$\underline{1}$
1	0	1	0
1	1	0	0
1	1	1	$\underline{1}$

Universidad del Cauca

Generalizando

- $\alpha \equiv \varphi$
- $\varphi_j = (\bigwedge_{i=1,\sigma(P_i)=1}^{n} P_i) \wedge (\bigwedge_{i=1,\sigma(P_i)=0}^{n} \neg P_i)$
- $\varphi \equiv \bigvee_{j=1,\sigma(\varphi_j)=1}^{2^n} \varphi_j$
- $\varphi \equiv \bigvee_{j=1,\varphi_j)=1}^{2^n} (\bigwedge_{i=1,\sigma(P_i)=1}^{n} P_i) \wedge (\bigwedge_{i=1,\sigma(P_i)=0}^{n} \neg P_i)$
- En el caso de que φ sea una contradicción entonces $\varphi \equiv (p \wedge (\neg p))$

Universidad del Cauca

Generalizando

- $\alpha \equiv \varphi$
- $\varphi_j = (\bigwedge_{i=1,\sigma(P_i)=1}^{n} P_i) \wedge (\bigwedge_{i=1,\sigma(P_i)=0}^{n} \neg P_i)$
- $\varphi \equiv \bigvee_{j=1,\sigma(\varphi_j)=1}^{2^n} \varphi_j$
- $\varphi \equiv \bigvee_{j=1,\varphi_j)=1}^{2^n} (\bigwedge_{i=1,\sigma(P_i)=1}^{n} P_i) \wedge (\bigwedge_{i=1,\sigma(P_i)=0}^{n} \neg P_i)$
- En el caso de que φ sea una contradicción entonces $\varphi \equiv (p \wedge (\neg p))$
- $\therefore$ cualquier tabla de verdad puede ser representada por una fórmula que sólo usa los conectivos lógicos $\wedge$, $\vee$ y $\neg$.

Universidad del Cauca

Conjuntos de Operadores Funcionalmente Completos

Un conjunto de operadores lógicos C es funcionalmente completo, si todas las fórmulas en $\mathcal{L}(P)$ es lógicamente equivalente a una fórmula que solo usa los operadores de C. $\{\neg, \wedge, \vee\}$ es funcionalmente completo (ya fue demostrado).
Demostrar que $\{\neg, \vee\}$ es funcionalmente completo.

Universidad del Cauca

Literales

Un *literal* es una variable proposicional o la negación de una variable proposicional, por ejemplo, p y $\neg r$ son ambos literales. De ahora en adelante supondremos que $\neg$ tiene presedencia sobre $\wedge$ y $\vee$, y por lo tanto podremos escribir una fórmula como $((\neg p) \vee q) \wedge (\neg r)$, simplemente como $(\neg p \vee q) \wedge \neg r$. Por tanto, para este caso $\neg p, qy\neg r$ son literales.

Universidad del Cauca

Formas Normales

Forma Normal Disyuntiva FND

Una fórmula φ se encuentra en *Forma Normal Disyuntiva (FND)* si es una disyunción de conjunciones de literales, es decir, presenta la forma $B_1 \vee B2_2 \vee B_3 \vee B_4 \vee ... \vee B_k$, donde cada término B_i es una conjunción de literales, es decir $B_i = (l_{i1} \wedge l_{i2} \wedge l_{i3} \wedge ... \wedge l_{ik_i})$

Universidad del Cauca

Formas Normales

Forma Normal Conjuntiva FNC

Una fórmula φ se encuentra en *Forma Normal Conjuntiva (FNC)* si es una conjunción de disyunciones de literales, es decir, presenta la forma $C_1 \wedge C2_2 \wedge C_3 \wedge C_4 \wedge ... \wedge C_k$, donde cada término C_i es una conjunción de literales, es decir $C_i = (l_{i1} \vee l_{i2} \vee l_{i3} \vee ... \vee l_{ik_i})$. A una disynción de literales se le llama *Cláusula*, así los términos C_i son cláusulas. Por tanto la FNC es una conjunción de cláusulas.

Universidad del Cauca

Formas Normales

Teorema

1. Toda fórmula $\varphi \in \mathcal{L}(P), \exists \psi_{FND}$, tal que $\varphi \equiv \psi_{FND}$
2. Toda fórmula $\varphi \in \mathcal{L}(P), \exists \psi_{FNC}$, tal que $\varphi \equiv \psi_{FNC}$

Universidad del Cauca

Valuación de Conjuntos de Fórmulas

Sea P un conjunto de variables proposicionales. Dado un conjunto de fórmulas Σ en $\mathcal{L}(P)$ y una valuación σ para las variables en P, σ satisface Σ si $\forall \varphi \in \Sigma$, se tiene que $\sigma(\varphi) = 1$. En este caso se escribe como $\sigma(\varphi) = 1$

Universidad del Cauca

Consecuencia Lógica

Definición de Consecuencia Lógica

Sea Σ un conjunto de fórmulas en $\mathcal{L}(P)$ y sea $\psi \in \mathcal{L}(P)$. ψ es *consecuencia lógica de* Σ, si $\forall \sigma$ tal que $\sigma(\Sigma) = 1$, $\sigma(\psi) = 1$. Esto se escribirá como $\Sigma \models \psi$

Universidad del Cauca

Reglas de Consecuencia Lógica

1. $\{p, p \rightarrow q\} \models q$ (Modus Ponens)
2. $\{\neg q, p \rightarrow q\} \models \neg p$ (Modus Tollens)
3. $\{p \vee q \vee r, p \rightarrow s, q \rightarrow s, r \rightarrow s\} \models s$ (Demostración por partes)
4. $\{p \vee q, \neg q \rightarrow 3\} \models p \vee r$ (Resolución)

Universidad del Cauca

Consecuencia Lógica

Definición de Conjuntos de Fórmulas Inconsistentes y Satisfacibles

Un conjunto de fórmulas Σ es *inconsistente* si no existe una valuación tal que $\sigma(\Sigma) = 1$. El conjunto Σ es *satisfacible*, si existe una valuación σ tal que $\sigma(\Sigma) = 1$

Universidad del Cauca

Consecuencia Lógica

Teorema de la Consecuencia Lógica

$\Sigma \models \varphi \leftrightarrow \Sigma \cup \{\neg\varphi\}$ es inconsistente.

Esta es la base para la demostración por resolución:

1. Unimos el conjunto de fórmulas como una gran fórmula en FNC aprovechando que $\Sigma \equiv \bigwedge_{\varphi \in \Sigma}^{|\Sigma|} \varphi$
2. A las cláusulas agregamos la negación de la consequencia en evaluación.
3. Verificamos que el resultado es inconsistente (Existe una contradicción)

Universidad del Cauca

Demostración

La expresión lógica es: $\Sigma \models \vartheta \leftrightarrow \Sigma \cup \{\neg\vartheta\}$ es inconsistente, por tanto se debe demostrar en ambos sentidos.
Veamos: $\Sigma \models \vartheta \rightarrow \Sigma \cup \{\neg\vartheta\}$ lo haremos por contradicción

1. $\Sigma \models \vartheta$ Premisa
2. $\Sigma \cup \{\neg\vartheta\}$ es consistente (suposición)
3. $\sigma(\Sigma) = 1 \wedge \sigma(\neg\vartheta) = 1$ Por ser consistente el sistema (2)
4. $\sigma(\vartheta) = 0$ Por definición de la negación en (3)
5. $\Sigma \not\models \vartheta$ por definición de consecuencia lógica entre (3) y (4)
6. π entre (1) y (5)

Por tanto, se comprueba verdadero: $\Sigma \models \vartheta \rightarrow \Sigma \cup \{\neg\vartheta\}$

Universidad del Cauca

Demostración

Ahora veamos $\Sigma \cup \{\neg\vartheta\}$ es inconsistente $\rightarrow \Sigma \models \vartheta$:

1. $\Sigma \cup \{\neg\vartheta\}$ es inconsistente, es una premisa
2. $\sigma(\Sigma) = 1 \wedge \sigma(\neg\vartheta) = 0$ por ser inconsistente el sistema (1)
3. $\sigma(\vartheta) = 1$ por definición de la negación en (2)
4. $\Sigma \models \vartheta$ Por definición de consecuencia lógica entre (2) y (3)

Por tanto, se comprueba verdadero: $\Sigma \cup \{\neg\vartheta\}$ es inconsistente $\rightarrow \Sigma \models \vartheta$
$\therefore \Sigma \models \vartheta \leftrightarrow \Sigma \cup \{\neg\vartheta\}$ es Verdadero.

Universidad del Cauca

Introducción a la Lógica Proposicional
Seminario de Matemáticas

Julio Ariel Hurtado Alegría
ahurtado@unicauca.edu.co

8 de mayo de 2015

Universidad del Cauca