

Introducción a la Inducción Matemática

Seminario de Matemáticas

Julio Ariel Hurtado Alegría
ahurtado@unicauca.edu.co

13 de febrero de 2015



Universidad
del Cauca

Agenda

Motivation

Principios de la Inducción

Inducción Por Curso de Valores - PICV

Inducción Estructural



Universidad
del Cauca

Inducción Matemática

Vamos a hacer el juego *El Último Pierde*. Este juego se juega entre dos participantes con un tablero lineal de 12 casillas.

1. A cada turno un jugador marca 1,2 o 3 casillas con su sello personal, y le da el turno a su oponente.
2. El juego se termina cuando se marca la última casilla
3. El jugador que marque la última casilla PIERDE.

Compitamos ...



Inducción Matemática



Naturales Versus Reales

1. ¿Qué tienen de particular los números naturales sobre los números reales?
2. ¿Qué significa?



Principio del Buen Orden - PBO

1. Todo subconjunto no vacío de los naturales tiene un menor elemento.
- 2.

$$\text{Si } A \neq \emptyset \wedge A \subseteq \mathbb{N} \rightarrow \exists x \mid x \leq y, \forall y \in A$$



Teorema. Principio de Inducción Simple

Sea $A \subseteq \mathbb{N}$. Si A cumple con:

1. $0 \in A$
2. Si $n \in A \rightarrow n + 1 \in A$

Entonces $A = \mathbb{N}$



Demostración por contradicción

1. Sea el conjunto $A \subseteq \mathbb{N}$ (Cumple con el PIS)
2. Supongamos que $A \neq \mathbb{N}$ (Negamos la hipótesis)
3. El conjunto $B = \mathbb{N} - A$ cumple con $B \subseteq \mathbb{N}$ y con $BA \neq \emptyset$ (2)
4. $\exists b \in B \mid b \leq x, \forall x \in B$ y $b \neq 0$, ya que $0 \in A$ (PBO)
5. Dado que $b - 1 \in \mathbb{N}$ y $b - 1 \notin B$ entonces $b - 1 \in A$ (4)
6. Por el PIS en A , entonces $b \in A$ lo que contradice (4)
7. La contradicción ocurre por la suposición en (2) por tanto se cumple que $A = \mathbb{N}$ §



Ejemplo 1. El menor número natural

Demostrar que 0 es el menor número natural¹

¹Considerando que 0 pertenece a los naturales



Principio de Inducción Simple Generalizado

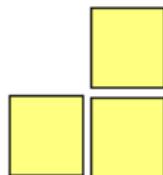
Sea P una propiedad cualquiera sobre los elementos de \mathbb{N} . Si se cumple que:

1. $P(0)$ es verdadero, es decir, 0 cumple la propiedad en P
2. $P(n) \rightarrow P(n + 1)$, es decir, cada vez que n cumple la propiedad $n + 1$ también la cumple.

Entonces todos los elementos de \mathbb{N} cumplen la propiedad P .



Ejemplos



1. Demuestre que para todo número natural n se cumple que $7^n - 2^n$ es múltiplo de 5
2. Demuestre que para todo número natural $n > 4$ se cumple que $n! > 2^n$
3. Demuestre que para cualquier tablero cuadrado de dimensiones $2^n \times 2^n$ con $n \geq 1$ al que le falta un casillero puede ser cubierto por trominós rectos. Un trominó recto es una figura formada 3 cuadrados formando ángulo recto.



Principio de Inducción Por Curso de Valores- PICV

Sea $A \subseteq \mathbb{N}$.

Si se cumple que $\forall n \in \mathbb{N}$:

$$\forall k < n, k \in A \rightarrow n \in A$$

entonces $A = \mathbb{N}$.



Principio de Inducción Por Curso de Valores Generalizado- PICVG

Sea P una propiedad cualquiera sobre elementos de \mathbb{N} .
Si se cumple que:

$$\forall k < n, k \in A, P(k) \text{ es verdadero} \rightarrow P(n) \text{ es verdadero}$$

entonces P es verdadero $\forall n \in \mathbb{N}$.



Principio de Inducción Por Curso de Valores Generalizado- PICVG

Ejemplo:

Demostrar que, si la Universidad del Cauca tiene una cantidad infinita de estampillas de 4 y 7 pesos, puede hacer cualquier cobro de cantidad igual o superior a 18 pesos.



Inducción Estructural

La inducción también puede verse como un método de construcción, por ejemplo el conjunto de los \mathbb{N} puede ser definido a partir de un elemento base y el operador sucesor (agregar 1). La estructura que los describe sería dada por:

1. El $0 \in \mathbb{N}$
2. Si $n \in \mathbb{N}$ entonces $n + 1 \in \mathbb{N}$
3. Todos los número naturales y sólo ellos se obtienen a partir de las reglas 1 y 2.

¿Podrían otros conjuntos definirse así?



Marco de Trabajo de la Inducción Estructural

1. Un conjunto de elementos base (Puede ser infinito).
2. Un conjunto de reglas de construcción de nuevos elementos del conjunto a partir de los elementos que ya pertenecen.
3. Se asume la frase que todos los elementos del conjunto y sólo ellos se obtienen a partir de las reglas de construcción definidas.



Definiciones estructurales de funciones y operadores

- ▶ Se aprovecha el carácter constructivo para definir operadores sobre los elementos.
- ▶ Son conocidas como definiciones recursivas. Ejemplo simple: el factorial
 1. $0! = 1$
 2. $(n + 1)! = (n + 1).n!$



Caso de Estudio: Las listas

Sea $L_{\mathbb{N}}$ el conjunto de todas las listas de naturales:

1. $\emptyset \in L_{\mathbb{N}}$
2. Si $k \in \mathbb{N}$ y $L \in L_{\mathbb{N}} \Rightarrow L \rightarrow k \in L_{\mathbb{N}}$

Esta definición entrega una noción para la igualdad de las listas ¿cuál es? Se pueden plantear propiedades y demostrarlas por inducción - Ejemplo, *igualdad de elementos y enlaces*.



Operadores sobre listas: El largo de una lista

La función $|L| : L_{\mathbb{N}} \rightarrow \mathbb{N}$

1. $|\emptyset| = 0$
2. $|L' \rightarrow k| = |L'| + 1$, siendo $L = L' \rightarrow k, k \in \mathbb{N}$



Operadores sobre listas: La suma de los elementos de una lista

La función $Sum(L) : L_{\mathbb{N}} \rightarrow \mathbb{N}$

1. $Sum(\emptyset) = 0$
2. $Sum(L' \rightarrow k) = Sum(L') + k$, siendo $L = L' \rightarrow k, k \in \mathbb{N}$



Operadores sobre listas: La cabecera de la lista

La función $Cab(L) : L_{\mathbb{N}} - \{\emptyset\} \rightarrow \mathbb{N}$

1. $Cab(\rightarrow k) = k$, siendo $L = \rightarrow k, k \in \mathbb{N}$
2. $Cab(L' \rightarrow k) = Cab(L')$, siendo $L = L' \rightarrow k, L \neq \emptyset$



Operadores sobre listas: El máximo de una lista

La función $Max(L) : L_{\mathbb{N}} \cup \{-1\} \rightarrow \mathbb{N}$

1. $Max(\emptyset) = -1$

2. $Max(L' \rightarrow k) = \begin{cases} Max(L') & \text{para } Max(L') \geq k \\ k & \text{para } k > Max(L') \end{cases}$



Operadores sobre listas: El sufijo de una lista

La función $Sufijo(L) : L_{\mathbb{N}} - \{\emptyset\} \rightarrow L_{\mathbb{N}}$

1. $Sufijo(\rightarrow k) = \emptyset$, siendo $L = \rightarrow k, k \in \mathbb{N}$
2. $Sufijo(L' \rightarrow k) = Sufijo(L') \rightarrow k$, siendo $L = L' \rightarrow k, L \neq \emptyset$



Propiedades de las listas

1. $\forall L \in L_{\mathbb{N}}$ se cumple que $Sum(L) \geq 0$
2. $\forall L \in L_{\mathbb{N}}$ se cumple que $Max(L) \leq Sum(L)$
3. $\forall L \in L_{\mathbb{N}}$ se cumple que $Sum(L) = Cab(L) + Sum(Sufijo(L))$
4. $\forall L_1, L_2 \in L_{\mathbb{N}}, L_1, L_2 \neq \emptyset$ se cumple
 $L_1 = L_2 \Leftrightarrow Sufijo(L_1) = Sufijo(L_2)$ y $Sum(L_1) = Sum(L_2)$



Caso de Estudio: Árboles Binarios

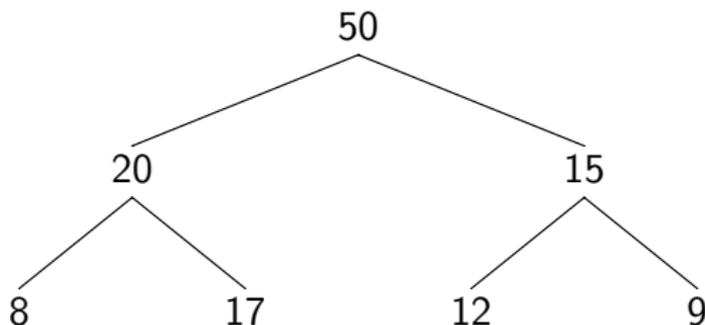
Sea $A_{\mathbb{N}}$ el conjunto de todos los árboles binarios con números naturales definido por:

1. $() \in A_{\mathbb{N}}$, en éste caso es un árbol trivial nulo (nodo nulo)
2. $\forall k \in \mathbb{N}, ((), k, ()) \in A_{\mathbb{N}}$, en éste caso es un árbol trivial (un nodo raíz) y k es el valor de la raíz.
3. Sean $I, D \in A_{\mathbb{N}}, k \in \mathbb{N} \Rightarrow (I, k, D) \in A_{\mathbb{N}}$, en éste caso es un árbol no trivial donde k es el valor de la raíz e I y D son los hijos(sub-árboles).



Heap (Árbol Pila)

Los números naturales sobre el Heap cumplen la siguiente propiedad: para cada nodo X en el árbol, el valor de X es tan grande como el valor más grande de sus hijos.



Heap (Árbol Pila)

Demostrar por inducción que si un árbol binario completo presenta la propiedad del Heap, entonces el valor en la raíz del árbol es igual o superior al valor de cada nodo del árbol.



Introducción a la Inducción Matemática

Seminario de Matemáticas

Julio Ariel Hurtado Alegría
ahurtado@unicauca.edu.co

13 de febrero de 2015



Universidad
del Cauca