Pauta de la Segunda Prueba Seminario de Matemáticas

Maestría en Computación - Universidad del Cauca

1. Lógica de Primer Orden

(a) Modele la siguiente oración usando lógica de primer orden: *entre cualquier par de números pares hay al menos un número impar*. Diga cual es el conjunto de símbolos utilizado y dé una estructura compatible.(Valor 1.0)

(b) Usando lógica de primer orden modele la paradoja de Russell: *Erase un pueblo con un cierto número de barberos. Estos afeitaban a los que no eran barberos. Pero ¿quién los afeitaría a ellos? Algunos querían afeitarse ellos mismos, otros preferían que los afeitara otro barbero. Después de discutir varios días, decidieron nombrar a uno sólo de ellos como el barbero de todos los barberos. Este barbero, entonces, estaría a cargo de afeitar exactamente a todos los barberos que no se afeitaran a sí mismos. El barbero designado quedó muy contento con su nombramiento, hasta que a la mañana siguiente se preguntó quién lo afeitaría, si se afeitaba él mismo, entonces estaba afeitando un barbero que se afeitaba a sí mismo,incumpliendo su designación. Pero si no se afeitaba él mismo, entonces no estaría afeitando a alguien que no se afeitaba a sí mismo, también incumpliendo su designación. El barbero renunció y nunca lograron encontrar un reemplazante.*(Valor 1.0). Respuesta: $\forall x, y\ afeita(x, y) \iff \neg afeita(y, y)$, instanciando el barbero de barberos como BB (Regla de instanciación) tenemos que $afeita(BB, BB) \iff \neg afeita(BB, BB)$ lo cual es una contradicción y es allí donde está la paradoja.

2. Teoría de Grafos

(a) Demuestre que todo grafo G simple y finito tiene al menos dos vértices que tienen el mismo grado(Valor 1.0). Supongamos un grafo con n vértices cada uno con un grado distinto de los otros. Así cada uno de los nodos del grafo está conectado a 0,1,2,3,..,n-1 otros vértices(0 a n-1, es decir n grados distintos para los ne vértices). Sea v el vértices que está conectado con los otros n-1 vértices, entonces está conectado con los demás, así que no habrá un vértice conectado a 0 vértices. Así es imposible tener un grafo donde un vértice sea de grado n-1 y otro de grado 0. Así los vértices pueden tener a lo más n-1 grados diferentes y no los n que suponíamos, por lo tanto uno de ellos va a repetir el grado de otro, por lo que al menos dos vértices deben tener el mismo grado.

(b) Demostrar que todo k-cubo (Q_k) tiene un circuito hamiltoniano. (Valor 1.0) Respuesta: Por inducción: (BI) Si k = 2, simplemente se necesita visitar cada nodo de un grafo de cuatro vértices con un cuatro arcos conectándolos. Por (HI) supondremos que para k se cumple que Q_k tiene un circuito hamiltoniano. (TI) Debemos demostrar que Q_{k+1} tiene un circuito hamiltoniano. Tomamos dos copias del Q_k y conectamos los arcos correspondientes. Tomamos el ciclo hamiltoniano en cada uno de los Q_k. Seleccionamos una arista(correspondiente) en cada uno de los Q_k que pertenezca al ciclo hamiltoniano y la borramos. Finalmente, agregamos al camino conexiones entre los correspondientes puntos terminales de los cubos los cuales producirán un ciclo en el Q_{k+1}.

(c) Demostrar que si cada componente conexa(C_i) de un grafo G es bipartita, entonces el grafo G es bipartito. (Valor 1.0) Respuesta: Si cada componente es dividida en los conjuntos disyntos A_i y B_i entonces A = $U_i A_i$ and $B = U_i B_i$ son conjuntos disjuntos también con todos los elementos de G, haciendo de G un grafo bipartito. .

Algo he aprendido en mi larga vida: que toda nuestra ciencia, contrastada con la realidad, es primitiva y pueril; y, sin embargo, es lo más valioso que tenemos.

Bertrand Russell