# Introducción a la Inducción Matemática
## Seminario de Matemáticas

Julio Ariel Hurtado Alegría
ahurtado@unicauca.edu.co

15 de marzo de 2013

Universidad del Cauca

# Agenda



Universidad
del Cauca

# Inducción Matemática

Universidad del Cauca

# Naturales Versus Reales

1. ¿Qué tienen de particular los números naturales sobre los números reales?
2. ¿Qué significa?

Universidad del Cauca

# Principio del Buen Orden - PBO

1. Todo subconjunto no vacío de los naturales tiene un menor elemento.
2. $$Si\ A \neq \emptyset \wedge A \subseteq \mathbb{N} \rightarrow \exists x \mid x \leq\ y,\ \forall\ y \in A$$

# Teorema. Principio de Inducción Simple

Sea $A \subseteq \mathbb{N}$. Si $A$ cumple con:

1. $0 \in A$
2. $Si\ n \in A \rightarrow n + 1 \in A$

Entonces $A = \mathbb{N}$

Universidad del Cauca

# Demostración por contradicción

1. Sea el conjunto $A \subseteq \mathbb{N}$ (Cumple con el PIS)
2. Supongamos que $A \neq \mathbb{N}$ (Negamos la hipótesis)
3. El conjunto $B = \mathbb{N} - A$ cumple con $B \subseteq \mathbb{N}$ y con $BA \neq \emptyset$ (2)
4. $\exists b \in B \mid b \leq \; x, \; \forall \; x \in B$ y $b \neq 0$ , ya que $0 \in A$ (PBO)
5. Dado que $b - 1 \in \mathbb{N} \; y \; b - 1 \notin B$ entonces $b - 1 \in A$ (4)
6. Por el PIS en A, entonces $b \in A$ lo que contradice (4)
7. La contradicción ocurre por la suposición en (2) por tanto se cumple que $A = \mathbb{N}$ §

Universidad del Cauca

# Ejemplo 1. El menor número natural

Demostrar que 0 es el menor número natural[1]

[1] Considerando que 0 pertenece a los naturales

# Principio de Inducción Simple Generalizado

Sea P una propiedad cualquiera sobre los elementos de $\mathbb{N}$. Si se cumple que:

1. $P(0)$ es verdadero, es decir, 0 cumple la propiedad en $P$
2. $P(n) \rightarrow P(n+1)$, es decir, cada vez que $n$ cumple la propiedad $n+1$ también la cumple.

Entonces todos los elementos de $\mathbb{N}$ cumplen la propiedad P.

Universidad del Cauca

# Ejemplos

1. Demuestre que para todo número natural $n$ se cumple que $7^n - 2^n$ es múltiplo de 5
2. Demuestre que para todo número natural $n > 4$ se cumple que $n! > 2^n$
3. Demuestre que para todo $i \geq 1, j \geq 1$, cualquier tablero de dimensiones $2i \cdot 3j$ (al que no le falta ningún casillero), se puede cubrir con trominós rectos. Un trominó recto es una figura formada 3 cuadrados formando ángulo recto.

Universidad del Cauca

# Principio de Inducción Por Curso de Valores- PICV

Sea A $\subseteq \mathbb{N}$.
Si se cumple que $\forall n \in N$ :

$$\forall k < n, k \in A \rightarrow n \in A$$

entonces A $= \mathbb{N}$.

# Principio de Inducción Por Curso de Valores Generalizado-PICVG

Sea P una propiedad cualquiera sobre elementos de $\mathbb{N}$.
Si se cumple que:

$$\forall k < n, k \in A, P(k) \text{ es verdadero} \rightarrow P(n) \text{ es verdadero}$$

entonces P es verdadero $\forall n \in \mathbb{N}$.

Universidad del Cauca

# Principio de Inducción Por Curso de Valores Generalizado-PICVG

Ejemplo:
Demostrar que, si la Universidad del Cauca tiene una cantidad infinita de estampillas de 4 y 7 pesos, puede hacer cualquier cobro de cantidad igual o superior a 18 pesos.

Universidad
del Cauca

# Inducción Estructural

La inducción también puede verse como un método de contrucción, por ejemplo el conjunto de los $\mathbb{N}$ puede ser definido a partir de un elemento base y el operador sucesor(agregar 1). La estructura que los describe sería dada por:

1. El $0 \in \mathbb{N}$
2. Si $n \in \mathbb{N}$ entonces $n + 1 \in \mathbb{N}$
3. Todos los número naturales y sólo ellos se obtienen a partir de las reglas 1 y 2.

¿Podrían otros conjuntos definirse así?

Universidad del Cauca

# Marco de Trabajo de la Inducción Estructural

1. Un conjunto de elementos base (Puede ser infinito).
2. Un conjunto de reglas de construcción de nuevos elementos del conjunto a partir de los elementos que ya pertenecen.
3. Se asume la frase que todos los elementos del conjunto y sólo ellos se obtienen a partir de las reglas de construcción definidas.

# Definiciones estructurales de funciones y operadores

- Se aprovecha el carácter constructivo para definir operadores sobre los elementos.
- Son conocidas como definiciones recursivas. Ejemplo simple: el factorial
  1. $0! = 1$
  2. $(n+1)! = (n+1).n!$

Universidad del Cauca

# Caso de Estudio: Las listas

Sea $L_{\mathbb{N}}$ el conjunto de todas las listas de naturales:

1. $\emptyset \in L_{\mathbb{N}}$
2. Si $k \in \mathbb{N}$ y $L \in L_{\mathbb{N}} \Rightarrow L \to k \in L_{\mathbb{N}}$

Esta definición entrega una noción para la igualdad de las listas ¿cuál es? Se pueden plantear propiedades y demostrarlas por inducción - Ejemplo, *igualdad de elementos y enlaces*.

Universidad del Cauca

# Operadores sobre listas: El largo de una lista

La función $|L| : L_{\mathbb{N}} \rightarrow \mathbb{N}$

1. $|\emptyset| = 0$
2. $|L' \rightarrow k| = |L'| + 1$, siendo $L = L' \rightarrow k, k \in \mathbb{N}$

Universidad del Cauca

# Operadores sobre listas: La suma de los elementos de una lista

La función $Sum(L) : L_{\mathbb{N}} \to \mathbb{N}$

1. $Sum(\emptyset) = 0$
2. $Sum(L' \to k) = Sum(L') + k$, siendo $L = L' \to k, k \in \mathbb{N}$

Universidad del Cauca

# Operadores sobre listas: La cabecera de la lista

La función $Cab(L) : L_{\mathbb{N}} - \{\emptyset\} \rightarrow \mathbb{N}$

1. $Cab(\rightarrow k) = k$, siendo $L = \rightarrow k, k \in \mathbb{N}$
2. $Cab(L' \rightarrow k) = Cab(L')$, siendo $L = L' \rightarrow k, L \neq \emptyset$

Universidad del Cauca

# Operadores sobre listas: El máximo de una lista

La función $Max(L) : L_{\mathbb{N}} \cup \{-1\} \rightarrow \mathbb{N}$

1. $Max(\emptyset) = -1$
2. $Max(L' \rightarrow k) = \begin{cases} Max(L') & \text{para } Max(L') \geq k) \\ k & \text{para } k > Max(L') \end{cases}$

Universidad del Cauca

# Operadores sobre listas: El sufijo de una lista

La función $Sufijo(L) : L_{\mathbb{N}} - \{\emptyset\} \rightarrow L_{\mathbb{N}}$

1. $Sufijo(\rightarrow k) = \emptyset$, siendo $L =\rightarrow k, k \in \mathbb{N}$
2. $Sufijo(L' \rightarrow k) = Sufijo(L') \rightarrow k$, siendo $L = L' \rightarrow k, L \neq \emptyset$

Universidad
del Cauca

# Propiedades de las listas

1. $\forall L \in L_{\mathbb{N}}$ se cumple que $Sum(L) \geq 0$
2. $\forall L \in L_{\mathbb{N}}$ se cumple que $Max(L) \leq Sum(L)$
3. $\forall L \in L_{\mathbb{N}}$ se cumple que $Sum(L) = Cab(L) + Sum(Sufijo(L))$
4. $\forall L_1, L_2 \in L_{\mathbb{N}}, L_1, L_2 \neq \emptyset$ se cumple
   $L_1 = L_2 \Leftrightarrow Sufijo(L_1) = Sufijo(L_2)$ y $Sum(L_1) = Sum(L_2)$

Universidad del Cauca

# Caso de Estudio: Árboles Binarios

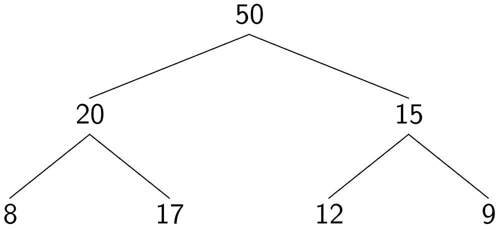
Sea$A_{\mathbb{N}}$ el conjunto de todos los árboles binarios con números naturales definido por:

1. $() \in A_{\mathbb{N}}$, en éste caso es un árbol trivial nulo (nodo nulo)
2. $\forall k \in \mathbb{N}$, $((), k, ()) \in A_{\mathbb{N}}$, en éste caso es un árbol trivial (un nodo raíz) y k es el valor de la raíz.
3. Sean $I, D \in A_{\mathbb{N}}, k \in \mathbb{N} \Rightarrow (I, k, D) \in A_{\mathbb{N}}$, en éste caso es un árbol no trivial donde k es el valor de la raíz e I y D son los hijos(sub-árboles).

Universidad del Cauca

# Heap (Árbol Pila)

Los números naturales sobre el Heap cumplen la siguiente propiedad: para cada nodo X en el árbol, el valor de X es tan grande como el valor más grande de sus hijos.




Universidad del Cauca

# Heap (Árbol Pila)

Demostrar por inducción que si un árbol binario completo presenta la propiedad del Heap, entonces el valor en la raíz del árbol es igual o superior al valor de cada nodo del árbol.

Universidad del Cauca

# Introducción a la Inducción Matemática
# Seminario de Matemáticas

Julio Ariel Hurtado Alegría
ahurtado@unicauca.edu.co

15 de marzo de 2013

Universidad del Cauca